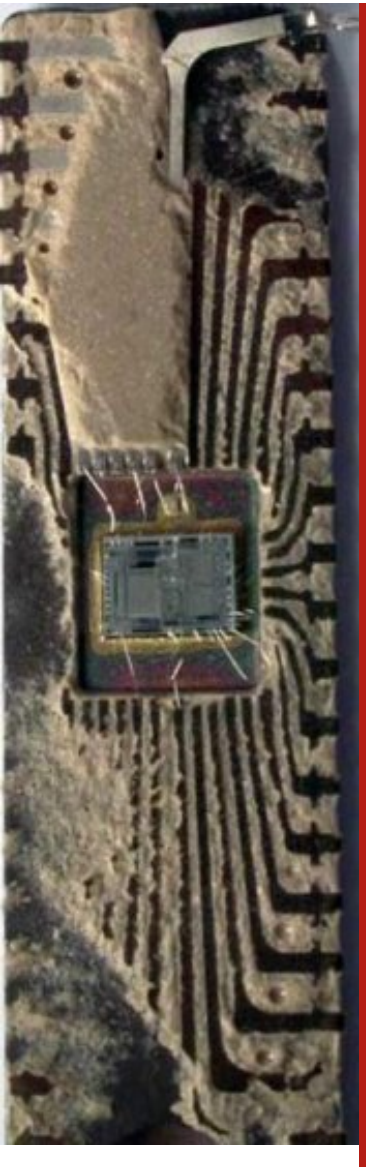
Politechnika Wrocławska



Arytmetyka zmiennoprzecinkowa

wer. 5

Wojciech Myszka, Maciej Panek

listopad 2014r.

Ułamki

Powinniśmy wiedzieć już wszystko na temat arytmetyki liczb całkowitych. Teraz zajmiemy się „liczbami zmiennoprzecinkowymi”.
Przez analogie do
$345{,}5 = 3 * 10^2 + 4 * 10^1 + 5 * 10^0 + 5 * 10^{-1}$
mamy:
$101011001{,}1_{(2)} = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 + 2^{-1}$
ale nie jest to zapis zbyt wygodny... Trzy cyfry po przecinku
$0{,}001_{(2)} = 0{,}125_{(10)}$

Duże liczby dziesiętne. . .

. . . zapisujemy korzystając z notacji wykładniczej (naukowej). Zamiast pisać

$$c = 299792458 \ \mathrm{m/s}$$

piszemy

$$c = 2{,}99792458 * 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

albo

$$c = 2{,}99792458 \ \mathrm{E}\, 8 \ \mathrm{m/s}$$

albo (w przybliżeniu)

$$c \sim 3 \ \mathrm{E}\, 8 \ \mathrm{m/s}$$

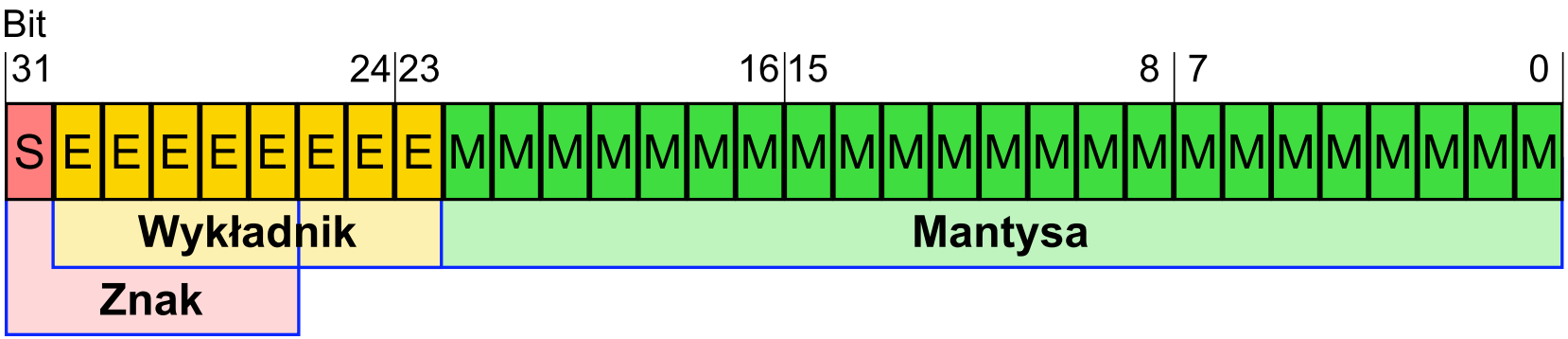
2,99792458 to mantysa; 8 to wykładnik (albo cecha).

Duże liczby binarne. . .

. . . można zapisywać tak samo:

$$1{,}11 * 2^7$$

Jest nawet specjalna norma na ten temat: IEEE-754.



Małe liczby binarne (bezwzględne)

Jak są zapisywane ...

Małe liczby binarne (bezwzględne)

Jak są zapisywane ...

Tak samo jak duże.

Małe liczby binarne (bezwzględne)

Jak są zapisywane ...

Tak samo jak duże.

Przy czym wykładnik musi przyjąć wartość ujemną.

Małe liczby binarne (bezwzględne)

Jak są zapisywane ...

Tak samo jak duże.

Przy czym wykładnik musi przyjąć wartość ujemną.

Stosując odowanie U2:

$$01111100_{(bias=127)} = 124 - 127 = -3$$

Małe liczby binarne (bezwzględne)

Jak są zapisywane ...

Tak samo jak duże.

Przy czym wykładnik musi przyjąć wartość ujemną.

Stosując odowanie U2:

$$01111100_{(bias=127)} = 124 - 127 = -3$$

$$10000101_{(bias=127)} = 133 - 127 = 6$$

Reasumując

Wartość liczby zmiennoprzecinkowej oblicza się ze wzoru:

$$x = (-1)^s \cdot M \cdot 2^{E-bias}$$

gdzie:

- S — bit znaku
- M — mantysa
- E — wykładnik
- *bias* — wartość przesunięcia (ang. *bias*),
  127 w formacie 32-bitowym i 1023 w 64-bitowym

Dokładność

Liczby 32-bitowe

- Dokładność „dwójkowa”: 24 bity
- Dokładność „dziesiętna”: $\sim$7,2 cyfry dziesiętne

Liczby 64-bitowe

- Dokładność „dwójkowa”: 53 bity
- Dokładność „dziesiętna”: $\sim$15,9 cyfry dziesiętne

Zakres

1. 32-bit: $1.17549\,\mathrm{E}-038$ do $3.40282\,\mathrm{E}+038$
2. 64-bit: $2.22507\,\mathrm{E}-308$ do $1.79769\,\mathrm{E}+308$

Operacje na liczbach zmiennoprzecinkowych I

1. Mnożenie.
   Jest proste: mnożymy mantysy i dodajemy wykładniki.
   $1{,}33\,e{+}3 * 1{,}55\,e{+}7 = 2{,}0615\,e{+}10$
   Następnie trzeba wynik „obciąć” do odpowiedniej liczby miejsc znaczących (w naszym przypadku niech to będą trzy cyfry) $-$ $2{,}06\,e{+}10$
   W przypadku liczb binarnych będzie podobnie.
   Uwaga: czasami może zdarzyć się problem: w wyniku mnożenia liczba może ulec „denormalizacji” $-$ wówczas trzeba ją znormalizować, zaokrąglić i skorygować wykładnik: $5{,}55\,e{+}0 * 6{,}33e{+}0 = 35{,}13\,e{+}0 = 3{,}51\,e{+}1$

Operacje na liczbach zmiennoprzecinkowych II

2. Dzielenie.
   Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenie (dzielimy mantysy, odejmujemy wykładniki). W przypadku „de-normalizacji” postępujemy jak wyżej
   $1{,}33\,e{+}0 / 9{,}88\,e{+}0 = 0{,}134615385\,e{+}0 = 1{,}35\,e{-}1$
3. Dodawanie.
   Sprawa nieco bardziej skomplikowana. Aby dodawać liczby zmiennoprzecinkowe trzeba je najpierw „zdenormalizować” i doprowadzić do równości wykładników:
   $1{,}22\,e{+}0 + 3{,}35\,e - 4 = 1{,}22\,e{+}0 + 0{,}000335\,e{+}0 =$
   $1{,}220335\,e{+}0 = 1{,}22\,e{+}0$
   a następnie zaokrąglić i znormalizować. . .

Operacje na liczbach zmiennoprzecinkowych III

4. Odejmowanie.
   Identycznie jak dodawanie.

Parę problemów

1. Zawsze(?) ograniczona liczba bitów przeznaczona na zapamiętanie liczby (ale znane są specjalne programy, które starają się te ograniczenie przezwyciężać).
2. Wynik działań arytmetycznych często prowadzi do powstania nadmiaru (czyli przekroczenia maksymalnej dopuszczalnej wartości liczb).
3. Większość liczb które (z przyzwyczajenia) traktujemy jako dokładne, nie ma dokładnej reprezentacji dwójkowej (0,5 jest OK ale 0,1 już nie).

Podstawowe definicje

Definicja (Wielkość)

Dowolna stała matematyczna, wynik jakiejś operacji matematycznej (działania), pierwiastek rozwiązywanego równania. π jest określony jako stosunek obwodu okręgu do jego średnicy; $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem równania kwadratowego $X^2 - 2 = 0$.

Definicja (Wartość dokładna wielkości)

Wartość wynikająca wprost z definicji wielkości, nie obarczona żadnymi błędami.

Definicja (Wartość przybliżona wielkości)

Wartość liczbowa uzyskana w wyniku obliczeń. Zazwyczaj w wyniku obliczeń nie uzyskujemy dokładnej wartości.

Wielkości fizyczne

Ciśnienie, temperatura, długość, stężenie — to przykłady wielkości fizycznych, które bardzo często „mierzymy”.

Każdy pomiar obarczony jest błędem wynikającym z dokładności użytego narzędzia pomiarowego.

Wartość dokładna to temperatura w jakimś miejscu sali; wartość przybliżona — to wartość zmierzona jakimś termometrem.

Obliczenia

- Używamy komputera do dokonania jakichś obliczeń.

Obliczenia

- Używamy komputera do dokonania jakichś obliczeń.
- Komputer podaje wynik ($a = 5{,}34273343$) mający 8 cyfr po przecinku.

Obliczenia

- Używamy komputera do dokonania jakichś obliczeń.
- Komputer podaje wynik ($a = 5{,}34273343$) mający 8 cyfr po przecinku.
- Czy możemy powiedzieć, że wyznaczona liczba ma wszystkie cyfry **poprawne**?, Czy różni się od wartości dokładnej o mniej niż $0{,}5 \cdot 10^{-8}$?

Obliczenia

- Używamy komputera do dokonania jakichś obliczeń.
- Komputer podaje wynik ($a = 5{,}34273343$) mający 8 cyfr po przecinku.
- Czy możemy powiedzieć, że wyznaczona liczba ma wszystkie cyfry **poprawne**?, Czy różni się od wartości dokładnej o mniej niż $0{,}5 \cdot 10^{-8}$?
- A co z sytuacją, że zastosowana metoda obliczeń jest mało dokładna?

Błędy

Rozważmy przykład. Dane są dwa wyrażenia:

Wyrażenie 1

$$x = ((b + a) - a)/b$$

Błędy

Rozważmy przykład. Dane są dwa wyrażenia:

Wyrażenie 1

$$x = ((b + a) - a)/b$$

Wyrażenie 2

$$y = (b + (a - a))/b$$

Błędy

Rozważmy przykład. Dane są dwa wyrażenia:

Wyrażenie 1

$$x = ((b + a) - a)/b$$

Wyrażenie 2

$$y = (b + (a - a))/b$$

Jaki powinien być wynik działań dla:

1. $a = 5$ i $b = 100$

Błędy

Rozważmy przykład. Dane są dwa wyrażenia:

Wyrażenie 1

$$x = ((b + a) - a)/b$$

Wyrażenie 2

$$y = (b + (a - a))/b$$

Jaki powinien być wynik działań dla:

1. $a = 5$ i $b = 100$
2. $a = 10^4$ oraz $b = 10^{-4}$

Błędy

Rozważmy przykład. Dane są dwa wyrażenia:

Wyrażenie 1

$$x = ((b + a) - a)/b$$

Wyrażenie 2

$$y = (b + (a - a))/b$$

Jaki powinien być wynik działań dla:

1. $a = 5$ i $b = 100$
2. $a = 10^4$ oraz $b = 10^{-4}$
3. $a = 10^{10}$ oraz $b = 10^{-10}$

Błędy cd.

Tym razem coś prostszego - dodawanie dwóch liczb:

```
// Floating-point_number_precision.c
// Compile options needed: none. Value of c is printed with a decimal
// point precision of 10 and 6 (printf rounded value by default) to
// show the difference
#include <stdio.h>

#define EPSILON 0.0001   // Define your own tolerance
#define FLOAT_EQ(x,v) (((v - EPSILON) < x) && (x <( v + EPSILON)))

int main() {
   float a, b, c;

   a = 1.345f;
   b = 1.123f;
   c = a + b;
   // if (FLOAT_EQ(c, 2.468)) // Remove comment for correct result
   if (c == 2.468)            // Comment this line for correct result
      printf("They are equal.\n");
   else
      printf("They are not equal! The value of c is %13.10f "
               "or %f",c,c);
}
```

(źródło: strona MSDN zatytułowana Why Floating-Point Numbers May Lose Precision)

Błędy cd.

Liczby nie są równe! Wartość wynosi 2.4679999352

lub 2.468000

Błąd bezwzględny wartości przybliżonej I

Definicja (Błąd bezwzględny wartości przybliżonej)

Niech A będzie wartością dokładną, a a wartością przybliżoną pewnej wielkości. ***Błędem bezwzględnym wartości przybliżonej*** *nazywamy każdą liczbę Δa spełniającą warunek:*

$$|A - a| \leq \Delta a,$$

to znaczy taką liczbę, że

$$a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a.$$

Błąd bezwzględny wartości przybliżonej II

Wartość przybliżona a i jej błąd bezwzględny Δa wyznaczają przedział:

$$< a - \Delta a;\ a + \Delta a >,$$

do którego należy dokładna wartość A
Błąd bezwzględny nie jest określony jednoznacznie!

Liczba przybliżona

Definicja (Liczba przybliżona)

Jeżeli a jest wartością przybliżoną dla wartości dokładnej A, obciążoną błędem Δa, to parę liczb Δa, a zapisaną w postaci

$$\frac{\Delta a}{a}$$

będziemy nazywali ***liczbą przybliżoną*** *dla A.*

Liczba π

Wiemy, że $\pi = 3{,}14159265\ldots$. Wartością przybliżoną π często używaną w rachunkach, jest liczba $3{,}14$.
Jej błędem bezwzględnym jest, na przykład, liczba $\Delta a = 0{,}0016$.
Dokładna wartość π jest zawarta między liczbami:

$$3{,}14 - 0{,}0016 \leq \pi \leq 3{,}14 + 0{,}0016$$

to znaczy π znajduje się w przedziale

$$< 3{,}1384;\ 3{,}1416 >$$

Zatem możemy zapisać $\pi = 3{,}14^{0{,}0016}$

„Równość w przybliżeniu”

Jeżeli liczby przybliżone $\overset{\alpha}{a}$ i $\overset{\beta}{b}$ są takie, że przedział $< a - \alpha;\ a + \alpha >$ jest zawarty w przedziale $< b - \beta;\ b + \beta >$ to mówimy, że **liczba $\overset{\alpha}{a}$ jest w przybliżeniu równa liczbie $\overset{\beta}{b}$.**

Zapisujemy to $\overset{\alpha}{a} \Rightarrow \overset{\beta}{b}$.

Z tego że „$\overset{\alpha}{a}$ jest w przybliżeniu równe $\overset{\beta}{b}$ NIE WYNIKA, że $\overset{\beta}{b}$ jest w przybliżeniu równe $\overset{\alpha}{a}$!

Zaokrąglanie liczb przybliżonych

Dla dowolnej liczby przybliżonej $\overset{\alpha}{a}$ i dowolnej liczby rzeczywistej b zachodzi związek:

$$\overset{\alpha}{a} \Rightarrow \overset{\alpha+|a-b|}{b}$$

czyli $\overset{\alpha}{a}$ jest w przybliżeniu równe $\overset{\alpha+|a-b|}{b}$
Zaokrąglanie stosujemy wtedy, gdy wynik jakichś działań ma zbyt wiele cyfr. Zastępując liczbę $\overset{\alpha}{a}=\overset{0,0000027}{3,14159}$ liczbą 3,14 możemy oszacować błąd. Wynosi on $0,0000027 + |3,14159 - 3,14|$. Czyli: 0,0015927. Zatem:

$$\overset{0,0000027}{3,14159} \Rightarrow \overset{0,0015927}{3,14}$$

Zaokrąglanie liczb przybliżonych

Jeżeli $\beta \geq \alpha$, to:

$$\overset{\alpha}{a} \Rightarrow \overset{\beta}{b}$$

Zatem $\overset{0,0015927}{3,14} \Rightarrow \overset{0,0016}{3,14}$

Reguły zaokrąglania I

- Gdy wynik działania arytmetycznego ma (za) dużo cyfr — możemy odrzucić „ostatnie, zbędne cyfry” (pamiętając o zwiększeniu błędu zaokrąglenia).
- Gdy pierwszą odrzuconą cyfrą jest 0, 1, 2, 3, 4 — cyfr pozostawionych w wartości przybliżonej nie zmieniamy.
- Jeżeli pierwszą odrzuconą cyfrą jest 5, 6, 7, 8, 9 — do pozostawionej części wartości przybliżonej dodajemy 1 na ostatnim zostawianym miejscu dziesiętnym.

Taka zmiana liczby przybliżonej nazywa się **poprawnym zaokrągleniem**.

Zadanie domowe: poczytać o innych sposobach zaokrąglania (zaokrąglanie „w dół”, zaokrąglanie „do góry”, zaokrąglanie „bankierskie”... Która z tych reguł to zaokrąglanie **poprawne**?

Działania na liczbach przybliżonych

suma

$$\overset{\alpha}{a} + \overset{\beta}{b} = \overset{\alpha+\beta}{a+b}$$

Działania na liczbach przybliżonych

suma

$$\overset{\alpha}{a} + \overset{\beta}{b} = \overset{\alpha+\beta}{a+b}$$

różnica

$$\overset{\alpha}{a} - \overset{\beta}{b} = \overset{\alpha+\beta}{a-b}$$

Działania na liczbach przybliżonych

iloczyn

$$\overset{\alpha}{a} \cdot \overset{\beta}{b} \Rightarrow \overset{|a|\beta+|b|\alpha+\alpha\beta}{ab}$$

Działania na liczbach przybliżonych

iloczyn

$$\overset{\alpha}{a} \cdot \overset{\beta}{b} \Rightarrow \overset{|a|\beta+|b|\alpha+\alpha\beta}{ab}$$

dzielenie

$$\overset{\alpha}{a} : \overset{\beta}{b} \Rightarrow \overset{\gamma}{\frac{a}{b}}$$

gdzie

$$\gamma = \frac{\alpha + |\frac{a}{b}|\beta}{|b| - \beta}.$$

Działania na liczbach przybliżonych

Zadanie domowe

Jak będzie w przypadku innych operacji:

- podnoszenie do potęgi?
- pierwiastkowanie (dowolnego stopnia)
- jakieś inne operacje. . . ?

Działania na liczbach przybliżonych

suma

1. Pierwszy najmniej korzystny przypadek:

$$a - \alpha + b - \beta = (a + b) - (\alpha + \beta)$$

2. Drugi najmniej korzystny przypadek:

$$a + \alpha + b + \beta = (a + b) + (\alpha + \beta)$$

Działania na liczbach przybliżonych

suma

1. Pierwszy najmniej korzystny przypadek:

$$a - \alpha + b - \beta = (a + b) - (\alpha + \beta)$$

2. Drugi najmniej korzystny przypadek:

$$a + \alpha + b + \beta = (a + b) + (\alpha + \beta)$$

(Zadanie domowe: jak będzie w przypadku różnicy? A w przypadku iloczynu?)

Przykład

Obliczyć wartość wielomianu

$$w(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

dla $x = 2{,}1$.
Przyjmijmy, że współczynniki wielomianu są liczbami dokładnymi i równają się:

$$a_0 = 2{,}3,\ a_1 = 3,\ a_2 = -4{,}5,\ a_3 = 7{,}2,\ a_4 = -0,1$$

Najpierw obliczenia wykonamy z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku, a później z dokładnością do czterech.

Przykład cd I

dwie cyfry

$$x^2 = \overset{0,0}{2,1} \times \overset{0,0}{2,1} = \overset{0,00}{4,41}$$

$$x^3 = \overset{0,00}{4,41} \times \overset{0,0}{2,1} = \overset{0,000}{9,261} \Rightarrow \overset{0,001}{9,26}$$

$$x^4 = \overset{0,001}{9,26} \times \overset{0,0}{2,1} \Rightarrow \overset{0,0021}{19,446} \Rightarrow \overset{0,0061}{19,45}$$

$$2,3 \times x^4 = \overset{0,0}{2,3} \times \overset{0,0061}{19,45} \Rightarrow \overset{0,01403}{44,735} \Rightarrow \overset{0,01903}{44,74} \Rightarrow \overset{0,02}{44,74}$$

$$3x^3 = \overset{0}{3} \times \overset{0,001}{9,26} \Rightarrow \overset{0,003}{27,78}$$

$$-4,5x^2 = \overset{0,0}{-4,5} \times \overset{0,00}{4,41} \Rightarrow \overset{0,000}{-19,845} \Rightarrow \overset{0,005}{-19,85}$$

Przykład cd II

dwie cyfry

$$\overset{0,0}{7,2}x = \overset{0,0}{7,2} \times \overset{0,0}{2,1} \Rightarrow \overset{0,00}{15,12}$$

suma:

$$w(2,1) = \overset{0,02}{44,74} + \overset{0,003}{27,78} - \overset{0,005}{19,85} + \overset{0,00}{15,12} - \overset{0,0}{0,1} = \overset{0,028}{67,69}$$

Przykład cd I

cztery cyfry

$$x^2 = \overset{0,0}{2,1} \times \overset{0,0}{2,1} = \overset{0,00}{4,41}$$

$$x^3 = \overset{0,00}{4,41} \times \overset{0,0}{2,1} = \overset{0,000}{9,261}$$

$$x^4 = \overset{0,000}{9,261} \times \overset{0,0}{2,1} = \overset{0,0000}{19,4481}$$

$$2,3 \times x^4 = \overset{0,0}{2,3} \times \overset{0,0000}{19,4481} = \overset{0,0000}{44,73063} \Rightarrow \overset{0,00003}{44,7306}$$

$$3x^3 = \overset{0}{3} \times \overset{0,000}{9,261} = \overset{0,000}{27,783}$$

$$-4,5x^2 = \overset{0,0}{-4,5} \times \overset{0,00}{4,41} = \overset{0,000}{-19,845}$$

Przykład cd II

cztery cyfry

$$\overset{0,0}{7,2}x = \overset{0,0}{7,2} \times \overset{0,0}{2,1} = \overset{0,00}{15,12}$$

suma

$$w(2,1) = \overset{0,00003}{44,7306} + \overset{0,000}{27,783} - \overset{0,000}{19,845} + \overset{0,00}{15,12} - \overset{0,0}{0,1} = \overset{0,00003}{67,6886}$$

Przykład cd I

Załóżmy teraz, że współczynniki obarczone są błędami i równają się:

$$a_0 \overset{0,01}{=} 2,3,\ a_1 \overset{0}{=} 3,\ a_2 \overset{0,02}{=} -4,5,\ a_3 \overset{0,02}{=} 7,2,\ a_4 \overset{0,01}{=} -0,1$$

dwie cyfry

$$w(2,1) \overset{0,42}{\Rightarrow} 67,69$$

cztery cyfry

$$w(2,1) \overset{0,3678}{\Rightarrow} 67,6886 \overset{0,3692}{\Rightarrow} 67,69 \overset{0,37}{\Rightarrow} 67,69$$

Przykład cd II

Prowadzenie obliczeń z dokładnością do czterech cyfr po przecinku praktycznie nie zwiększyło dokładności!
Wynika to stąd, że dane obarczone są dużym błędem (już druga cyfra po przecinku nie jest dokładna).

Przykład

$$x_0 \in [0; 1] \tag{1}$$

$$x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k) \tag{2}$$

Niech $\mu = 3{,}8$

Program komputerowy

```
program caos;
uses
   crt;
var
   s : single;     { 32-bit real }
   d : double;     { 64-bit real }
   e : extended;   { 80-bit real }
   i : integer;
begin
   s := 0.5;
   d := 0.5;
   e := 0.5;
   for i := 1 to 100 do begin
      s := 3.8 * s * (1 - s);
      d := 3.8 * d * (1 - d);
      e := 3.8 * e * (1 - e);
      if (i/10 = int(i/10)) then begin
         writeln (i:10, s:16:5, d:16:5, e:16:5);
      end;
   end;
   readln;
end.
```

Wyniki

k	x(k)	x(k)
10	0.18510	0.18509
20	0.23963	0.23963
30	0.90200	0.90200
40	0.82493	0.82492
50	0.53714	0.53713
60	0.66878	0.66878
70	0.53190	0.53202
80	0.93557	0.93275
90	0.69203	0.79885
100	0.41983	0.23161

Błędów obliczeń...

katastrofalne skutki:

- 25 lutego 1991 roku iracka rakieta typu SCUD trafia w barak w Dhahranie (Arabia Saudyjska) zabijając 28 amerykańskich żołnierzy.
  Zawiódł system obrony przeciwlotniczej PATRIOT.
  Zegar (licznik) baterii patriot liczył czas w zmiennej całkowitej. Następnie w celu dalszych obliczeń ten licznik rzutowany był na liczbę zmiennoprzecinkową. Podczas gdy Irakijczycy wystrzelili rakietę, system PATRIOT działał już od ponad 100 godzin. Błąd zegara po konwersji na zmienną zmiennoprzecinkową wynosił około 1/3 sekundy.

Błędów obliczeń...

katastrofalne skutki:

- 4 czerwca 1996 roku po 37 sekundach lotu rakieta Ariane 5 zeszła z kursu i została zniszczona przez system autodestrukcji.
  Straty wyniosły około 500 mln dolarów USA. System sterowania skopiowano
  z Ariane 4, który miał wolniejsze silniki. Większe prędkości osiągane przesz Ariane 5 powodowały generowanie przez oprogramowanie większych liczb, które program ze zmiennej 64-bitowej konwertował na liczbę 16-bitową.
  Z powodu nadmiaru komputer zwrócił wyjątek, który spowodował pojawienie się następnych.

Literatura dodatkowa I

David Goldberg.
What every computer scientist should know about Floating-Point arithmetic.
Numerical Computation Guide. Sun Microsystems, Palo Alto, 2000.
http://docs.oracle.com/cd/E19957-01/806-3568/ncg_goldberg.html.

Wojciech Myszka.
Przykładowe programiki pokazujące problemy numeryczne.
Dostępne pod adresem
http://www.immt.pwr.wroc.pl/~myszka/TI/kod.html,
październik 2008.

Literatura dodatkowa II

Alan Ward.
Some issues on floating-point precision under linux.
Linux Gazette, (53), May 2000.
http://linuxgazette.net/issue53/ward.html.

Roman Zuber.
Metody numeryczne i programowanie.
WSziP, 1975.
fragmenty:
http://www.immt.pwr.wroc.pl/~myszka/TI/zuber.pdf
oraz
http://www.immt.pwr.wroc.pl/~myszka/TI/zuber1.pdf.

Kolofon

Prezentacja złożona w systemie LaTeX 2_ε z wykorzystaniem klasy beamer. Użyto fontu MS Trebuchet. Ilustracja na stronie tytułowej jest fragmentem zdjęcia, przedstawiającego 8-bitowy mikrokontroler Intel 8742, zawierający w jednym układzie CPU o szybkości 12 MHz, 128 bajtów RAM, 2048 bajtów EPROM oraz układy wejścia/wyjścia.
Sameli, Ioan. 2006. Old processor. Maj 25. Flickr. http://www.flickr.com/photos/biwook/153062645/.