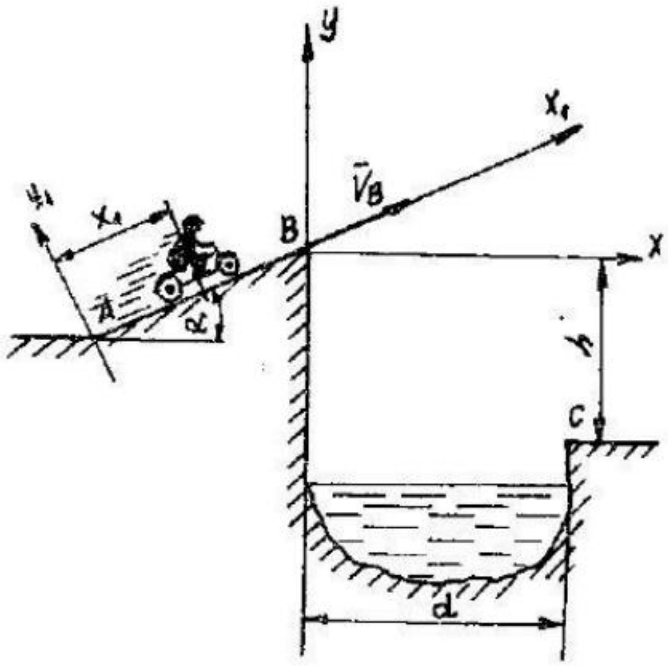
Równania różniczkowe ruchu punktu materialnego

W tym zagadnieniu wykorzystamy umiejętność rozwiązywania prostych równań różniczkowych do opisu ruchu punktu materialnego. Zadania tego typu mają dwie części:

1. Ruch po równi pochyłej (np. stok góry)
2. Ruch w powietrzu

Rozwiązywanie zadań tego typu omówimy na przykładzie:

Mając w punkcie A prędkość v_A, motocykl porusza się τ $[s]$ na odcinku $AB = l$, tworzącym z poziomem kąt α. Gdy siła P powodująca ruch jest stała na całym odcinku AB, motocykl w punkcie B osiąga prędkość v_B i przelatuje przez rów o szerokości d, znajdując się w powietrzu T $[s]$ i ląduje w punkcie C z prędkością v_C. Masa motocykla z motocyklistą jest równa m. Rozwiązując zadanie przyjąć motocykl z motocyklistą za punkt materialny i pominąć opory ruchu.



Poniżej zestawiono przykładowe dane:

$$\alpha = 30°$$

$$m = 500\ kg$$

$$P = 3000\ N$$

$$v_A = 0\frac{m}{s}$$

$$AB = l = 50\ m$$

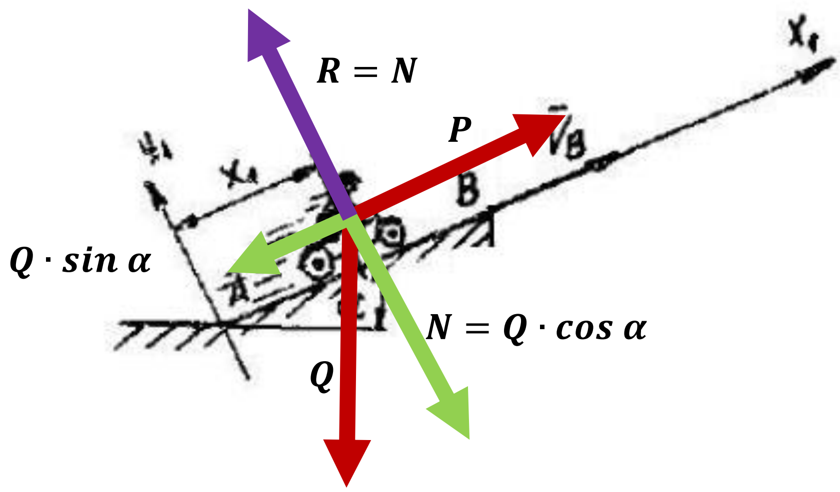
$$d = 10\ m$$

W zadaniu chcemy wyznaczyć prędkość z jaką wylatuje motocykl na końcu odcinka AB - a więc v_B oraz prędkość gdy ponownie dotknie ziemi a więc v_C.

Zadanie rozwiążemy w dwóch częściach. Najpierw zanalizujemy ruch motocykla po stoku i obliczymy prędkość v_B a później przejdziemy do dalszej części zadania.

<u>Krok 1</u> Analiza sił działających na ciało

Kiedy motocykl znajduje się na odcinku AB działają na niego następujące siły – siła ciężkości $\bar{Q}$, siła napędowa $\bar{P}$ oraz siła reakcji podłoża $\bar{R}$. Siłę ciężkości $\bar{Q}$ rozłożymy na siłę równoległą do podłoża oraz prostopadłą do podłoża. Nacisk zaś jest tą częścią siły $\bar{Q}$ która jest prostopadła do podłoża. Proszę zauważyć, że w zadaniu wprowadzono nowy układ współrzędnych oparty o osie $x_1\ i\ y_1$ – oczywiście można by wykorzystać „standardowe osie" ale w tym przypadku będzie to dla nas ułatwienie – będzie to łatwo dostrzec przy zapisie sił.



Analiza rysunku powinna nas doprowadzić do następującego wniosku siły działające wzdłuż osi y_1 równoważą się (co powinno być oczywiste na bazie III zasady dynamiki Newtona). Natomiast wzdłuż osi x_1 działa niezrównoważona siła równa:

$$F_w = P - Q \cdot \sin\alpha = 3000N - 500\ kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot \sin 30° = 3000N - 2500N = 500N$$

<u>Krok 2</u> Zapis równań różniczkowych ruchu

Wielkościami opisującymi ruch są przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie. Powinien być znany czytelnikom fakt, że prędkość to pierwsza pochodna przemieszczenia po czasie, natomiast przyspieszenie stanowi drugą pochodną przemieszczenia po czasie.

Symbolicznie możemy zapisać więc, że:

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Korzystając z II zasady dynamiki newtona możemy zapisać, że niezrównoważona siła wypadkowa powoduje ruch ciała o masie m z przyspieszeniem a:

$$F_w = m \cdot a$$

Korzystając z pokazanych wyżej zależności możemy zapisać, że:

$$F_W = m \cdot \ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = \frac{F_w}{m}$$

Teraz wykonamy operację całkowania (**<u>Uwaga! Należy pamiętać o stałych całkowania</u>**):

$$\int \frac{F_w}{m}\, dt = \int \ddot{x}\, dt$$

$$\frac{F_W}{m} t + C_1 = \dot{x}$$

I jeszcze raz:

$$\int \frac{F_W}{m} t + C_1\, dt = \int \dot{x}\ dt$$

$$\frac{F_w t^2}{2m} + C_1 t + C_2 = x$$

W ten sposób wyznaczyliśmy równania opisujące prędkość $\dot{x}$ oraz przemieszczenie x. Należy jednak wyznaczyć jeszcze stałe całkowania C_1 i C_2. Wykorzystamy do tego warunki początkowe. To znaczy informacje które wiemy o prędkości/położeniu w charakterystycznych punktach.

W przypadku naszego zadania te informacje to:

$$v_A = \dot{x}(0) = 0$$

$$x(0) = 0$$

Podstawiając te wartości do równań otrzymamy:

$$\frac{F_w}{m} t + C_1 = \dot{x}(t) \rightarrow \frac{500N}{500kg} 0 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

Oraz:

$$\frac{F_w t^2}{2m} + C_1 t + C_2 = x(t) \rightarrow \frac{500N \cdot 0^2}{2 \cdot 500\ kg} + 0 \cdot 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

W naszym przypadku więc okazało się że obie stałe wynoszą zero, nie zawsze jednak tak będzie – dlatego nie wolno pominąć stałych przy całkowaniu.

Zatem ostatecznie nasze równania ruchu są następujące:

$$x(t) = \frac{F_w t^2}{2m} = \frac{500\ N \cdot t^2}{2 \cdot 500\ kg} = 0{,}5t^2\ [m]$$

$$\dot{x}(t) = v(t) = \frac{F_W}{m} t = \frac{500N}{500\ kg} \cdot t = t\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

Krok 3 wyznaczenie czasu jaki zajmie pokonanie odcinka AB motocyklowi

Jesteśmy już prawie gotowi na podanie wartości prędkości w punkcie B – mamy równanie jednak występuję w nim niewiadoma – czas. Musimy zatem wyznaczyć czas jaki potrzebuje motocykl na przybycie drogi od punktu A do punktu B. Skorzystamy więc z drugiego równania – dzięki temu że znamy długość odcinka AB:

$$AB = l = 50\ m = x(t_B) = 0{,}5t_B^2$$

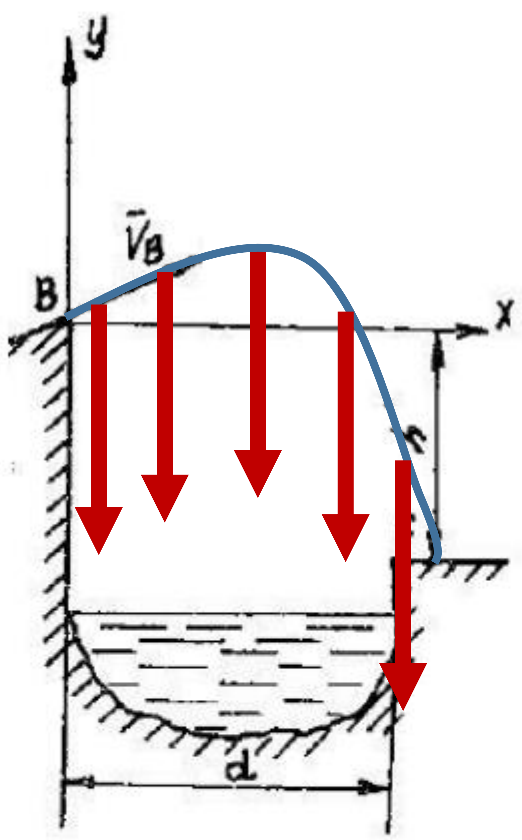
$$t_B = \sqrt{\frac{50\ m}{0{,}5\ s^2}} = 10\ s$$

Znając już czas t_B wyznaczamy prędkość v_B:

$$v_B = \dot{x}(t_B) = 10\frac{m}{s}$$

Krok 4 Analiza sił działających na motocykl w powietrzu.

Kiedy motocykl znajduje się w powietrzu w każdym momencie jego ruchu (po torze – niebieska krzywa) działa na niego tylko jedna siła – siła ciężkości Q oznaczona symbolicznie czerwonymi strzałkami. Proszę zauważyć, że w tej części wprowadziliśmy dla wygody nowe współrzędne $x\ i\ y$.



Podczas ruchu w powietrzu będzie zmieniało się zarówno położenie w pionie (w wyniku prędkości początkowej v_{B_Y} – składowa pionowa prędkości V_B jak i w poziomie (w wyniku prędkości początkowej v_{B_X} – składowej poziomej prędkości v_B.

Analogicznie do poprzedniego etapu zapiszemy więc dwa równania ruchu:

1. $-Q = -mg = m \cdot \ddot{y} \rightarrow -g = \ddot{y}$
   (minus przy sile ciężkości oznacza że jest ona skierowana przeciwnie do osi y)
2. $0 = m \cdot \ddot{x} \rightarrow 0 = \ddot{x}$

Po całkowaniu otrzymamy więc następujące równania:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_3 \\ x = C_3 t + C_4 \end{cases} \begin{cases} \dot{y} = gt + C_5 \\ y = \dfrac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6 \end{cases}$$

Uzyskane równania powinny kojarzyć się czytelnikowi z opisem ruchu jednostajnego (ruch w osi x) oraz jednostajnie przyspieszonego (ruch w osi y)

Oczywiście konieczne jest wyznaczenie stałych całkowania. Zapiszmy więc warunki początkowe:

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_{B_X} = v_B \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} v_B = \frac{5\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s}$$

Taki zestaw warunków początkowych pozwoli nam wyliczyć stałe całkowania $C_3\ i\ C_4$.

Żeby wyznaczyć równania związane z ruchem „pionowym" użyjemy następujących warunków brzegowych:

$$\dot{y}(0) = v_{B_Y} = v_B \cdot \sin 30° = 0{,}5 v_B = 5 \frac{m}{s}$$

$$y(0) = 0$$

To pozwoli nam wyznaczyć stałe całkowania C_5 i C_6

Żeby wyznaczyć prędkość v_C musimy znaleźć jej obie składowe tzn. $v_{x_C} = \dot{x}(t_c)$ i $v_{Y_C} = \dot{y}(t_c)$

Korzystając zaś z faktu, że $x(t_c) = d = 10\ m$ pozwoli wyliczyć czas t_c który jest potrzebny do przebycia drogi z B do C.

Wartość prędkości v_C obliczymy zgodnie z twierdzenia Pitagorasa jako $v_c = \sqrt{v_{X_C}^2 + v_{Y_C}^2}$

Wyznaczenie stałych całkowania oraz czasu t_C i prędkości v_C pozostawiam jako ćwiczenie.