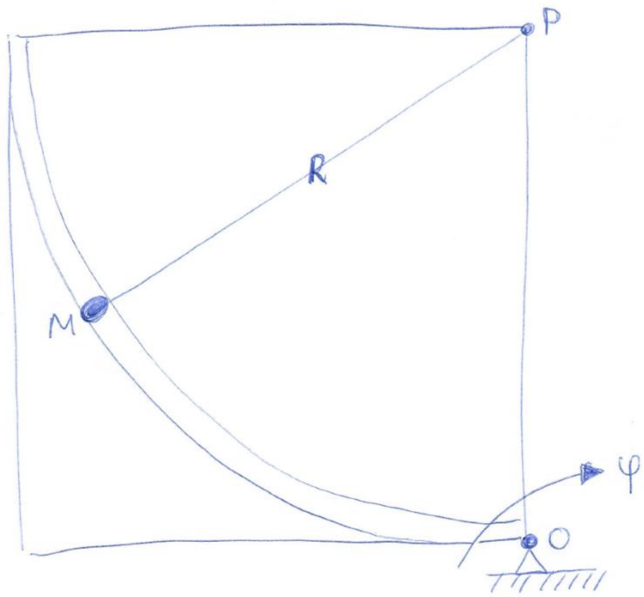
Dane:



- Przemieszczenie kątowe płyty: $\phi = 2t^3 - 6t\ [rad]$
- Długość toru kulki po łuku między punktami O i M: $OM = \frac{\pi}{6} \cdot t\ [m]$
- Promień toru po którym porusza się kulka: $R = 1\ [m]$
- Czas dla którego wyznaczamy wielkości: $t_0 = 2\ [s]$

Rozwiązanie

Opis ogólny: W przypadku tego typu zadań - to znaczy tyczących się ruchu **złożonego** punktu materialnego mamy do czynienia ze **złożeniem** dwóch typów ruchu:

- Ruchem unoszenia związanym z ruchem obrotowym płyty (w tym przypadku) bądź pręta itp.
- Ruchem względnym punktu materialnego (kulki) po torze związanym z płytą, prętem etc.

Korzystając z faktu, że prędkości i przyspieszenia są wielkościami wektorowymi możemy wyznaczyć składowe związane z poszczególnymi typami ruchu, a następnie korzystając z praw działań na wektorach wyznaczyć ich wypadkową.

Zadania tego typu posiadają pewien schemat wynikający z tego jakie wielkości potrzebujemy wyliczyć aby uzyskać informacje na temat ruchu naszej kulki.

Krok 1. Wyznaczenie danych wielkości w chwili czasu t_0 podanej w zadaniu

1) $\phi(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2\ rad = 16 - 12\ rad = 4\ rad$
   a. Na bazie przemieszczenia kątowego wyliczymy też prędkość obrotową, która będzie potrzebna w dalszej części zadania – w praktyce można ją wyznaczyć dopiero gdy będzie to konieczne:
      i. $\omega = \dot{\phi} = (2t^3 - 6t)' = 6t^2 - 6\ \left[\frac{rad}{s}\right]$
      ii. $\omega(2) = 18\frac{rad}{s}$
   b. Na bazie prędkości kątowej wyliczymy też przyspieszenie obrotowe, które będzie potrzebna w dalszej części zadania – w praktyce można ją wyznaczyć dopiero gdy będzie to konieczne:
      i. $\varepsilon = \dot{\omega} = (6t^2 - 6)' = 12t\ \left[\frac{rad}{s^2}\right]$
      ii. $\varepsilon(2) = 12 \cdot 2 = 24\frac{rad}{s^2}$
2) $OM(2) = \frac{\pi}{6} \cdot 2\ s = \frac{\pi}{3} <-$ a więc ten łuk oparty jest na kącie środkowym 60°

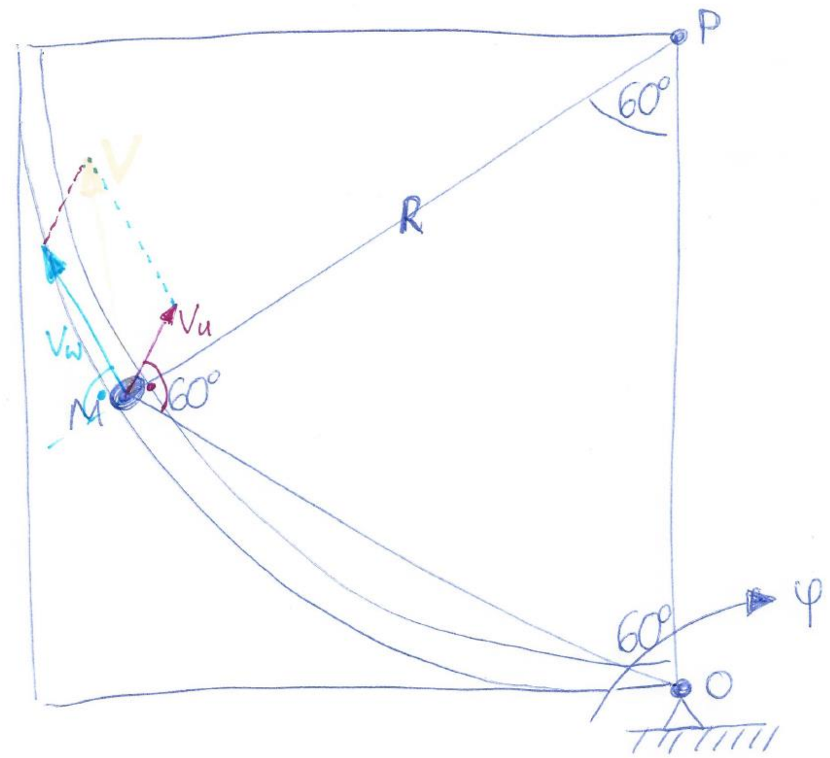
UWAGA! W przypadku naszego zadania odległość |OM| w linii prostej to R, ponieważ ΔMPO jest równoboczny. Jest to pewna zbieżność która nie wystąpi w przypadku nieco innego sformułowania zadania. Proszę zwróćcie uwagę na to, że mamy następujące wielkości:

- Promień obrotu w ruchu obrotowym – to jest po prostu odległość między środkiem obrotu (tu punkt O) i miejscem w którym znajduje się kulka (tu M) w linii prostej – w tym przypadku równa się to R = 1m
- Promień krzywizny toru $\boldsymbol{\rho}$ – to jest odległość od toru kulki do środka krzywizny – w tym przypadku jest to R – jeżeli tor będzie linią prosta to promień krzywizny wynosi ∞
- Przez |OM| rozumiem odcinek między punktami O i M, natomiast OM oznacza łuk między tymi punktami

Krok 2. Wyznaczenie prędkości kulki

1) Prędkość związana z obrotem płyty – to znaczy ruchem unoszenia:
   a. Wartość – standardowa prędkość związana z obrotem: $v_u = \omega \cdot R \rightarrow \; v_u(2) = \omega(2) \cdot |OM| = 18\frac{rad}{s} \cdot 1m = 18\frac{m}{s}$ (|OM| to promień obrotu – w tym przypadku równa się R, ale nie zawsze tak będzie – patrz uwaga)
   b. Kierunek: prostopadły do odcinka OM
   c. Zwrot: Zgodny z kierunkiem obrotu ϕ (bo prędkość ma znak +)
2) Prędkość związana z ruchem względnym:
   a. Wartość – korzystamy z faktu, że prędkość to pochodna z przemieszczenia po czasie: $v_w = \dot{OM} = \left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)' = \frac{\pi}{6}\left[\frac{m}{s}\right]$
   b. Kierunek: styczny do toru ruchu, a więc prostopadły do odcinka |PM|
   c. Zwrot: zgodny z sposobem wyliczania odległości OM (patrz rysunek) jeżeli przyspieszenie ma znak (+) i przeciwny jeżeli ma znak (-)
3) Obliczenie prędkości wypadkowej v – wyznaczamy sumę wektorów (na rysunku przedstawiono metodę graficzną) – żeby wyznaczyć wartość należy rozłożyć wektory na składowe (bo nie są one do siebie położone pod kątem 90° - wtedy wystarczyłoby tw. Pitagorasa) – odpowiednie kąty pod którymi wektory są nachylone do linii poziomej to:
   a. $60°\; dla\; v_u$ – zatem składowe to: $v_{u_y} = v_u \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $v_{u_x} = \frac{1}{2}v_u$
   b. 30° dla v_w – zatem składowe to: $v_{w_y} = \frac{1}{2}v_w$ oraz $v_{w_y} = v_w \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

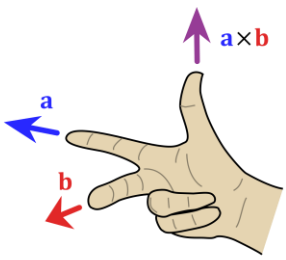
   Wyliczenie konkretnych wartości i długości prędkości v pozostawiam czytelnikom ☺



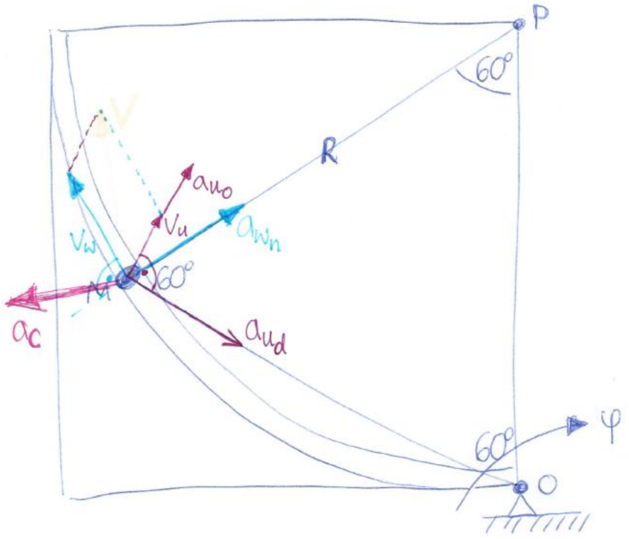
<u>Krok 3.</u> Wyznaczenie przyspieszeń kulki

1) Przyspieszenie **dośrodkowe** związane z obrotem płyty – to znaczy ruchem unoszenia:
    a. Wartość – $a_{u_d} = \omega^2 \cdot |OM| \rightarrow\ a_{u_d}(2) =\ \omega(2)^2 \cdot R = \left(18\frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 1m = 324\frac{m}{s}$ (|OM| to promień obrotu – w tym przypadku równa się R, ale nie zawsze tak będzie – patrz uwaga)
    b. Kierunek: taki jaki odcinek OM (zawsze na promieniu obrotu)
    c. Zwrot: zawsze **do środka** obrotu – czyli od M do O w tym przypadku
2) Przyspieszenie obrotowe związane z obrotem płyty – to znaczy ruchem unoszenia:
    a. Wartość – $a_{u_o} = \varepsilon \cdot |OM| \rightarrow\ a_{u_o}(2) =\ \varepsilon(2)^2 \cdot R = 24\frac{rad}{s^2} \cdot 1m = 24\frac{m}{s^2}$
    b. Kierunek: prostopadły do odcinka OM (|OM| to promień obrotu – w tym przypadku równa się R, ale nie zawsze tak będzie – patrz uwaga)
    c. Zwrot: Zgodny z kierunkiem obrotu ϕ (bo przyspieszenie ma znak +)
3) Przyspieszenie normalne związane z ruchem kulki po torze – to znaczy ruchem względnym:
    a. Wartość – $a_{w_n} = \frac{v_w^2}{\rho} \rightarrow\ a_{w_n}(2) = \frac{v_w^2(2)}{\rho} = \frac{\left(\frac{\pi}{6}\frac{m}{s}\right)^2}{1m} \approx 0{,}27\frac{m}{s^2}$ (Uwaga! Ponieważ dzielimy przez promień krzywizny to dla torów prostoliniowych wartość tego przyspieszenia to 0)
    b. Kierunek: taki jaki odcinek MP (zawsze na promieniu obrotu)
    c. Zwrot: zawsze do środka obrotu – w tym przypadku krzywizny – czyli od punktu M do punktu P

4) Przyspieszenie styczne związane z związane z ruchem kulki po torze – to znaczy ruchem względnym - korzystamy z faktu że jest ono pochodną prędkości względnej po czasie:
   a. Wartość – $a_{w_\tau} = \dot{v_w} = \left(\frac{\pi}{6}\right)' = 0$ ((W tym przypadku wartość przyspieszenia stycznego wyszła nam równa 0, dlatego że prędkość względna jest stała w czasie – jeżeli dane będą inne to przyspieszenie będzie niezerowe – wtedy należy podstawić za t = 2s i wyznaczyć jego wartość – poniżej opiszę sposób wyznaczania kierunku i zwrotu)
   b. Kierunek: styczny do toru ruchu, a więc prostopadły do odcinka |PM|
   c. Zwrot: zgodny z sposobem wyliczania odległości OM (patrz rysunek) jeżeli przyspieszenie ma znak (+) i przeciwny jeżeli ma znak (-)
5) Przyspieszenie Coriolisa (więcej o tym np. tu: [AGH - siła Coriolisa])
   a. Wartość - $a_c = 2 \cdot v \cdot \omega \cdot \sphericalangle(v, \omega)$ - jak już omawialiśmy wektor prędkości obrotowej jest położony na prostej prostopadłej do płaszczyzny obrotu – w tym przypadku oznacza to, że wektor jest prostopadły do płaszczyzny obrotu – bo płyta obraca się na rysunku) – to znaczy zaś że skoro prędkość v leży w płaszczyźnie rysunku to te dwa wektory są prostopadłe – czyli $a_C(2) = 2 \cdot v(2) \cdot \omega(2)$ – wartość prędkości obrotowej wyznaczyliśmy wcześniej, a prędkość pozostawiłem Państwu do wyznaczenia. Proszę zatem wyliczyć także wartość przyspieszenia Coriolisa.
   b. Kierunek – prostopadły do obu wektorów ω i v – leży zatem w płaszczyźnie rysunku i jest prostopadły do v
   c. Zwrot – wyznaczamy bazując na regule prawej dłoni (za Wikipedia Commons)



Wyznaczenie sumy jest możliwe oczywiście w analogiczny sposób co prędkości – poprzez graficzne bądź analityczne zsumowanie wszystkich wektorów składowych.


P
60°
R
a_{u_o}
v_u
a_{w_n}
v_w
60°
M
a_c
a_{u_d}
60°
φ
O