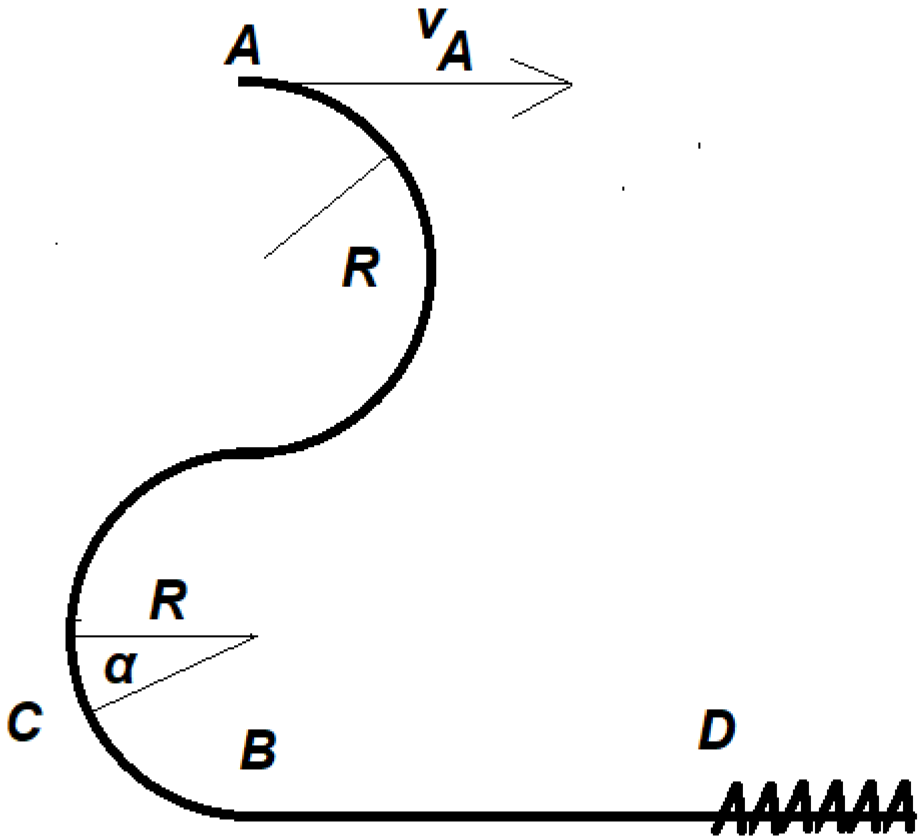
Zastosowanie zasad dynamiki do badania ruchu punktu materialnego nieswobodnego.

W tym zagadnieniu wykorzystamy znajomość zasady zachowania energii mechanicznej, zasady D' Alemberta, zasady zachowania pędu oraz zasady zachowania impulsu siły do analizy ruchu kulki (punktu materialnego po ograniczonym rurką torze. Przykłady przygotowywane do tego zadania skupiają się na sprawdzeniu znajomości i umiejętności wykorzystania tych zasad u studentów, a zatem na przykładzie pokażemy jak wygląda ich praktyczne zastosowanie:

Kulka, przyjęta za punkt materialny, porusza się z położenia A wewnątrz rurki. Znaleźć prędkość kulki w położeniach B, C i D oraz ciśnienie kulki p_C na ściankę rurki w położeniu C. Tarcie na krzywoliniowych odcinkach trajektorii pominąć.



Dla uproszczenia tor kulki narysowano jako krzywą (co jest sensowne zważając, że i tak rozważamy kulkę jako punkt materialny).

Poniżej zestawiono przykładowe dane:

$$m = 0{,}4\ kg$$

$$v_A = 1\frac{m}{s}$$

$$\tau = 0{,}25\ s \text{ – czas jaki kulce zajmuje pokonanie odcinka z B do D}$$

$$R = 1\ m$$

$$f = \mu = 0{,}4$$

$$\alpha = 45°$$

$$h_0 = 0\ cm$$

$$c = k = 1{,}1\ N/cm$$

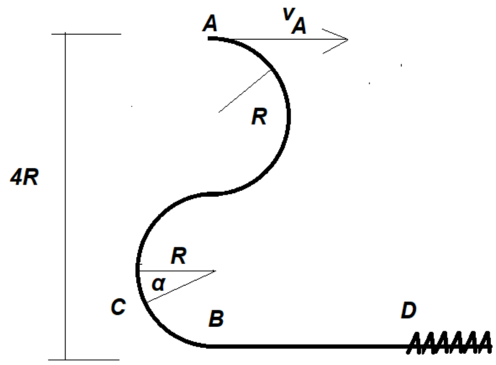
W zadaniu mamy wyliczyć kolejne prędkości w charakterystycznych punktach. Będziemy je więc rozwiązywać krok po kroku wykorzystując różne fizyczne zasady przytoczone we wstępie do zadania.

Krok 1 Wyznaczenie prędkości v_B – zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii mechanicznej mówi, że jeżeli na ciało **nie działają** siły zewnętrzne to suma energii się nie zmienia. Pełniejsza wersja te zasady powie nam, że zmiana energii jest równa pracy wykonanej przez zewnętrze siły nad tym ciałem. Ponieważ cały tor od A do B jest krzywoliniowy to według zadania pomijamy na nim tarcie – zatem jedyną działającą siłą jest siła grawitacji. Możemy więc zasadę dla tego przypadku opisać na dwa sposoby – albo:

1) zmiana energii kinetycznej $\Delta E_k = W_G\ praca\ sił\ ciężkości$
2) $\Delta E_m = \Delta E_k + \Delta E_p = W_{sił\ zewnętrznych} = 0$ – albo skorzystać z faktu, że siłę ciężkości możemy zastąpić pojęciem energii – robiliście już to w szkole ☺ – zainteresowanych tym, dlaczego tak jest odsyłam do pojęcia sił zachowawczych

Ja pokażę rozwiązanie przy użyciu podejścia 2. Natomiast proszę pamiętać, że jeżeli w zadaniu odcinek dla którego wykorzystujemy tę zasadę nie byłby krzywoliniowy i wystąpiłoby tam tarcie, to praca sił zewnętrznych byłaby równa pracy siły tarcia.



Żeby policzyć zmianę energii muszę zapisać energię w punkcie A i w punkcie B:

$E_{m_A} = \frac{m \cdot v_A^2}{2} + mg \cdot 4R$ <- przyjmujemy wysokość 0 na poziomie punktu B zatem wysokość punktu A to 4 promieni.

$$E_{m_B} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + mg \cdot 0 = \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

Zatem korzystając z zasady zachowania energii:

$$\frac{m \cdot v_B^2}{2} - \left(\frac{m \cdot v_A^2}{2} + mg \cdot 4R\right) = 0$$

Jedyną niewiadomą w tym równaniu jest v_B, a zatem możemy z łatwością ją wyznaczyć.

$$m \cdot v_B^2 - (m \cdot v_A^2 + mg \cdot 8R) = 0$$

$$v_B^2 - (v_A^2 + 80R) = 0$$

$$v_B^2 - (1 + 80) = 0 \ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{m}{s}\right]$$

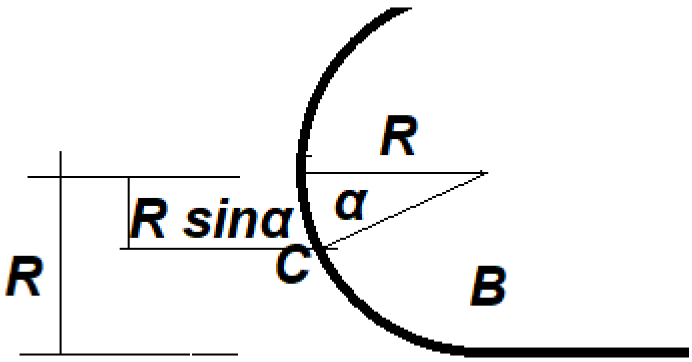
$$v_B = \sqrt{81} = 9 \ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{m}{s}\right]$$

Uwaga! Pamiętajcie obliczając jakąkolwiek Δ-ę zawsze odejmujecie początkową wartość od końcowej – dlatego w tym przypadku od energii w punkcie B odejmujemy energię w punkcie A.

Uwaga 2! Ktoś mógłby zapytać – no dobrze, ale prędkość to wektor a my wyznaczamy tylko wartości. W przypadku tego zadania, kulka ma ściśle zadany tor, który jednoznacznie pozwala nam określić kierunek i zwrot prędkości – gdyż jest on zgodny z torem ruchu. W tym przypadku kierunek prędkości v_B jest zgodny z odcinkiem BD, a zwrot jest od punktu B w stronę punktu D.

<u>**Krok 2**</u> Wyznaczenie prędkości v_c – zasada zachowania energii

Analogicznie do powyższego wyznaczamy prędkość v_C – potrzebujemy tylko wyznaczyć wysokość punktu C – korzystamy zatem z prostej trygonometrii.



$$\frac{m \cdot v_B^2}{2} - \left(\frac{m \cdot v_C^2}{2} + mg \cdot (R - R\sin\alpha)\right) = 0$$

Wyznaczenie wartości prędkości v_c nie powinno nikomu nastręczyć trudności i pozostawiam je jako ćwiczenie.

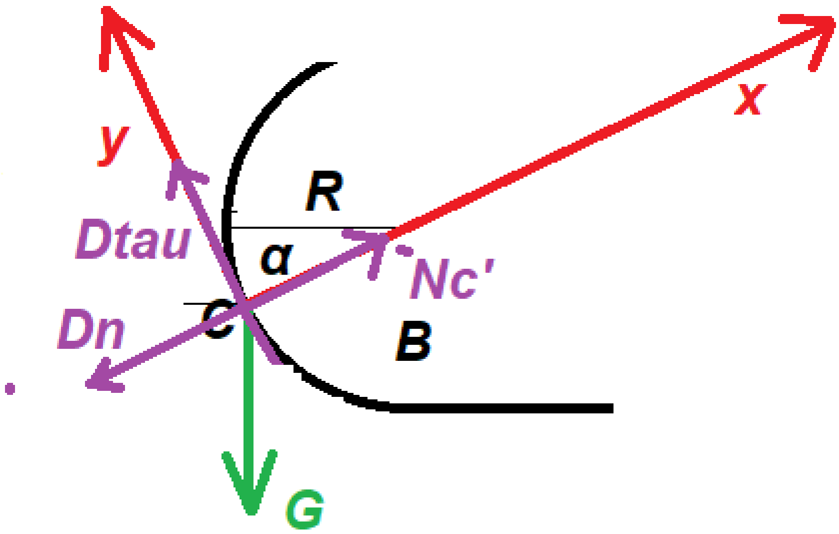
<u>**Krok 3**</u> Wyznaczenie siły nacisku N_C – zasada D' Alemberta

Zasada ta mówi, że suma sił działających na ciało (razem z siłami bezwładności) jest równa 0. Można ją dla naszego przypadku zapisać tak (gdzie G – siła ciężkości, $N_C{}'$– siła reakcji ścianki na kulkę w wyniku nacisku (równa co do wartości lecz z przeciwnym zwrotem niż siła nacisku kulki na ściankę N_C):

$$\bar{G} + \overline{N_C{}'} + \bar{D} = 0$$

Dla ułatwienia przyjmiemy sobie nowy układ współrzędnych – oznaczony na poniższym rysunku czerwonymi osiami x i y – można oczywiście tego nie robić – ale w ten sposób będzie nam łatwiej zapisać równania. Oczywiście dla „standardowych” osi x i y wyniki wyjdą również prawidłowe.

Oznaczamy wszystkie siły działające na ciało w punkcie „C” włączając w to siły bezwładności. Mamy więc siłę ciężkości G oznaczoną kolorem zielonym – jako jedyna nie leży na osiach x i y więc należy ją rozłożyć na siły składowe – składowa x - $G \cdot sin\alpha$ oraz składowa y $Gcos\alpha$. Następnie mamy siłę reakcji ścianki Nc' skierowaną po promieniu R (bo działa prostopadle do ścianki) oraz siły bezwładności – w sumie dwie – związaną z przyspieszeniem stycznym i normalnym w ruchu po okręgu – a więc D_n prostopadła do ścianki, oraz D_τ styczna do ścianki.



Zapisując równania mamy:

$$\Sigma X = 0 \rightarrow N_C' - G \cdot \sin\alpha - D_n = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow D_\tau - \ G \cdot \cos\alpha = 0$$

Proszę zauważyć, że drugie równanie zapisałem dla porządku – ale nie jest nam potrzebne do wyznaczenia wartości siły N_C'. To jest właśnie argument, dla którego przyjęliśmy takie osie $x\ i\ y$.

Rozpiszmy otrzymane równanie:

$$N_C' - mg \cdot \sin\alpha - \frac{mv_C^2}{2} = 0$$

$$N_C' - 0{,}4\,kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot \sin 45° - \frac{0{,}4\,kg \cdot v_C^2}{2} = 0$$

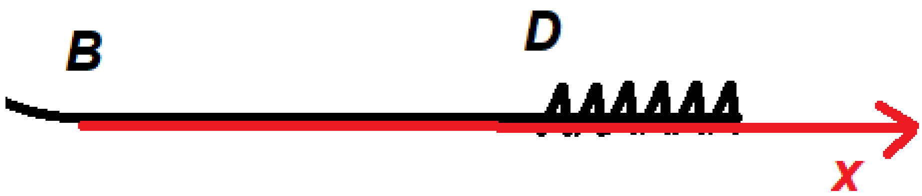
Zatem po wstawieniu wartości v_c możemy wyznaczyć $N_C{}'$.

Proszę pamiętać, że wyznaczamy siłę N_C' - czyli siłę z jaką działa ścianka na kulkę. Pytanie zaś jest o siłę nacisku kulki na ściankę. Siły te mają tę samą wartość i ten sam kierunek ale przeciwny zwrot. Proszę o tym nie zapomnieć zaznaczając ją na rysunku, co jest integralną częścią zadania (bo siła jest wektorem!).

<u>**Krok 4**</u> Wyznaczenie prędkości v_D – zasada zachowania pędu – impuls siły

Żeby wyznaczyć prędkość v_d skorzystamy z zasady zachowania pędu oraz pojęcia impulsu siły.

Pęd jest wielkością wektorową uzyskiwaną przez przemnożenie wektora prędkości przez skalar masy.



Zasadę zachowania pędu możemy zapisać następująco:

$$\Delta p = S$$

Gdzie Δp – zmiana pędu a S – impuls siły – czyli siła przemnożona przez czas w jakim ona działa (również wielkość wektorowa). Obie prędkości mają na szczęście taki sam kierunek działania (prosta BD) - a zatem możemy to równanie rozważyć tylko dla składowej „x" Jedyną siłą jaka działa wzdłuż „x" to siła tarcia (a czas jej działania to τ, a zatem możemy zapisać:

$$p_D - p_B = F_T \cdot \tau$$

$$m \cdot v_D - m \cdot v_B = F_N \cdot f \cdot \tau = mgf\tau$$

$$v_D - v_B = gf\tau$$

$$v_D = gf\tau + v_B$$

$$v_D = 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}25\ s + 9\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$$

Do samodzielnego zanalizowania dla chętnych pozostawiam dodatkowy problem – jak głęboko kulka wciśnie się w sprężynę. Można tu skorzystać z zasady zachowania energii wykorzystując wzór na siłę sprężystości albo na energię sprężyny. W ten sposób można znaleźć takie skrócenie sprężyny h, że prędkość będzie równa 0 (energia kinetyczna równa 0).

Uwagi ogólne

- W zadaniu pokazałem wyznaczanie prędkości przy użyciu zasady zachowania energii oraz zasady zachowania pędu. Drugą stosujemy tam, gdzie znamy czas przez jaki działa siła.
- W przypadku zasady zachowania energii należy pamiętać o uwzględnieniu wszystkich sił działających na ciało w postaci pracy tych sił. W naszym zadaniu równanie było proste bo na odcinkach krzywoliniowych nie ma tarcia – niemniej jedna w innych zadaniach może być tak że będzie trzeba tarcie w postaci jego pracy uwzględnić – proszę mieć to na uwadze.
- Proszę pamiętać, że wyznaczane wielkości – prędkości to wielkości wektorowe – zatem oprócz wyznaczonej wartości należy je wyrysować na rysunku – kierunek i zwrot są zależne od toru ruchu - w naszym typie zadań ten tor jest już zadany – zatem należy wyrysować tylko kierunek zgodny z kierunkiem ruchu (styczny do toru) oraz zwrot wynikający z tego skąd dokąd kulka „podróżuje".