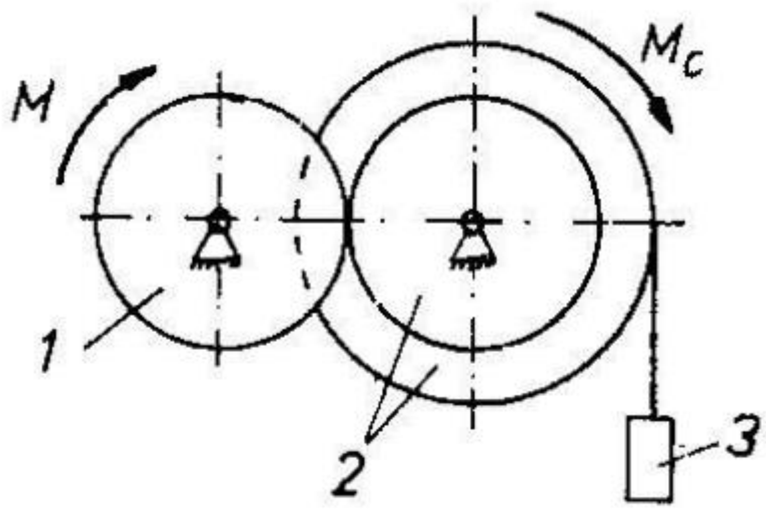
Dynamika ruchu obrotowego

Na człon 1 podanego mechanizmu, którego prędkość kątowa w chwili $t = 0$ jest równa ω_1, zaczyna w momencie $t = 0$ działać para sił o momencie M, bądź siła o wartości P. Masa członu 1 wynosi m_1, członu 2 – m_2, podnoszonego ciężaru 3 - m_3. Moment oporowy przy obrocie członu 2 jest równy M_c. Schematy mechanizmów pokazano poniżej. Znaleźć równania ruchu obrotowego członu 1 lub 2 (podane w szukanych). Wyznaczyć ponadto siłę obwodową T w punkcie styku. Człon 1 dla którego nie podano promienia bezwładności, traktować jako jednorodne tarcze kołowe.



Poniżej zestawiono dane do zadania:

$$m_1 = 100\ kg$$

$$m_2 = 300\ kg$$

$$m_3 = 500\ kg$$

$$R_1 = 0{,}2\ m$$

$R_2 = 0{,}6\ m$ (promień zewnętrzny tarczy 2)

$r_2 = 0{,}4\ m$ (promień wewnętrzny tarczy 2)

$$i_x^2 = 0{,}5\ m$$

$$M(t) = 2100 + 20t$$

$$M_c = 1000\ Nm$$

$$\omega_1 = 2\ s^{-1}$$

$$t_1 = 2\ s$$

$$\omega_1(t) = \dot{\varphi}_1 = ?$$

$$T = ?$$

Niniejszy typ zadań ma za zadanie wprowadzić i sprawdzić wiedzę na temat dynamiki ruchu obrotowego. Wykorzystywanym narzędziem będą więc równania ruchu obrotowego. Ogólne takie równanie ma postać:

$$I = \varepsilon \cdot M_w$$

A zatem wiąże moment bezwładności ciała (opis rozkładu masy) z Momentem wypadkowym działającym na ciało oraz przyspieszeniem kątowym ciała.

Krok 1 – równanie ruchu dla ciała 1

Analizę rozpoczniemy od ciała 1. W przypadku tego ciała należy uwzględnić następujące momenty: moment czynny M oraz moment od siły tarcia T występującej między ciałem 1 i 2. Siły grawitacji nie uwzględniamy bo ciało jest podparte w osi symetrii. Podobnie nie uwzględniamy np. sił działających w łożysku, czy reakcji normalnej na styku ciał 1 i 2 – bo nie generują momentu (ich kierunki przechodzą przez środek obrotu). Zatem suma momentów działających na ciało wynosi:

$$M_W = M(t) - T \cdot R_1$$

Moment siły tarcia jest przeciwny do kierunku ruchu powodowanego przez moment czynny M(t).

Przyspieszenie kątowe zapiszemy natomiast jako drugą pochodną przemieszczenia kątowego po czasie:

$$\varepsilon = \ddot{\omega}_1$$

Ostatecznie możemy zapisać:

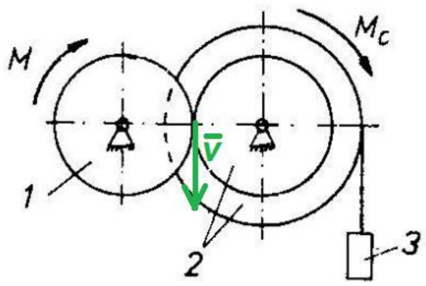
$$I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = (M(t) - T \cdot R_1)$$

Równanie to ma dwie niewiadome - φ_1 oraz T, dlatego musimy na razie podjąć inne kroki.

Krok 2 – związek między obrotem ciała 1 i 2

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie związku między φ_1 a φ_2. Będzie nam to potrzebne żeby wyznaczyć rozwiązanie zapisanego przed chwilą równania w kroku 4.

Skorzystamy z faktu, że w styku między tarczą 1 i 2 prędkość musi być taka sama – równa v.



$$v_{12} = v_{21}$$

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 r_2$$

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \frac{r_2}{R_1}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \cdot \frac{r_2}{R_1}$$

Teraz skorzystamy z różniczkowania:

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 \cdot \frac{r_2}{R_1}$$

Podstawiając tą zależność do wcześniejszego równania z kroku 1 otrzymamy:

$$I_1 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \frac{r_2}{R_1} = (M(t) - T \cdot R_1)$$

<u>Krok 3 – zapis równania ruchu obrotowego dla ciała 2 - na bazie krętu</u>

W przypadku ciała 2 do zapisania równania wykorzystamy znany nam już fakt, że:

$$\frac{dK}{dt} = M$$

Kręt ciała 2 z uwzględnieniem masy 3 która „odwija się" z tej tarczy możemy zapisać jako:

$$K = I_2\omega_2 + m_3 v_3 R_2 = (I_2 + m_3 R_2^2)\omega_2 = (I_2 + m_3 R_2^2) \cdot \dot{\varphi}_2$$

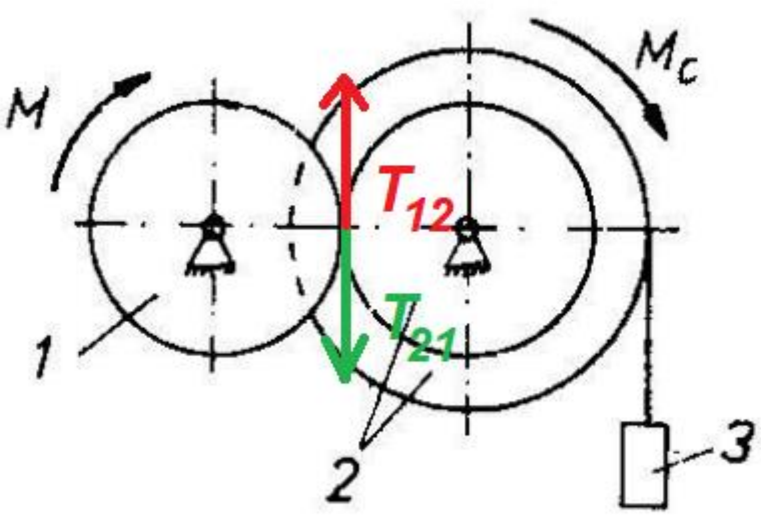
W powyższym przekształceniu skorzystano z faktu, że:

$$v_3 = \omega_2 \cdot R_2$$

Momenty jakie działają na ciało 2, to moment od siły T na promieniu r_2, moment od siły ciężkości działającej na ciężarek 3 na ramieniu R_2 oraz moment M_c zdefiniowany w treści zadania. Zatem:

$$M = Tr_2 - M_c - m_3 g R_2$$

Komentarza wymaga to dlaczego moment od siły T został zapisany ze znakiem plus, a M_c ze znakiem minus.



W rzeczywistości siłę, którą rozpatrywaliśmy w kroku 1 należałoby opisać jako T_{21}. Siła działająca na ciało 2 - T_{12} – ma tą samą wartość i kierunek lecz przeciwny zwrot. Moment siły od siły T_{12} ma więc znak przeciwny do M_c

Ostatecznie możemy więc zapisać:

$$(I_2 + m_3 R_2^2) \cdot \dot{\varphi}_2 = Tr_2 - M_c - m_3 g R_2$$

Krok 4 – układ równań

Korzystając z zapisanych przez nas równań mamy:

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \dfrac{r_2}{R_1} = (M(t) - T \cdot R_1) \\ (I_2 + m_3 R_2^2) \cdot \dot{\varphi}_2 = Tr_2 - M_c - m_3 g R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \dfrac{r_2}{R_1} = M(t) - T \cdot R_1 & /\cdot r_2 \\ (I_2 + m_3 R_2^2) \cdot \dot{\varphi}_2 = Tr_2 - M_c - m_3 g R_2 & /\cdot R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \dfrac{r_2^2}{R_1} = M(t) r_2 - T \cdot R_1 r_2 \\ (I_2 + m_3 R_2^2) \cdot \dot{\varphi}_2 R_1 = T R_1 r_2 - M_c R_1 - m_3 g R_2 R_1 \end{cases}$$

Dodajemy stronami i otrzymujemy:

$$I_1 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \frac{r_2^2}{R_1} + (I_2 + m_3 R_2^2) \cdot \dot{\varphi}_2 R_1 = M(t) r_2 - M_c R_1 - m_3 g R_2 R_1$$

W równaniu tym mamy tylko jedną niewiadomą: $\ddot{\varphi}_2$

Należy jeszcze podać jak wyznaczyć I_1 oraz I_2.

Moment bezwładności tarczy 1 wyznaczamy na bazie wzoru dla tarczy kołowej:

$$I_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2}$$

Moment bezwładności tarczy 2 wyznaczymy bazując na promieniu bezwładności:

$$I_2 = m_2 i_2^2$$

Rozwiązanie równania pozostawiam Państwu jako ćwiczenie. Po otrzymaniu $\ddot{\varphi}_2$ możemy wyznaczyć pozostałe szukane wielkości:

$$\dot{\varphi}_2(t) = \int \ddot{\varphi_2}(t)\, dt$$

Należy pamiętać o uwzględnieniu stałej całkowania. Wyznaczymy ją na podstawie informacji z treści:

$$\omega_1 = 2\ s^{-1}$$

Siłę T możemy wyznaczyć korzystając z wyliczonego $\ddot{\varphi}_2$ np. z równania:

$$I_1 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \frac{r_2}{R_1} = (M(t) - T \cdot R_1)$$

$$T = \frac{I_1 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \frac{r_2}{R_1} - M(t)}{R_1}$$