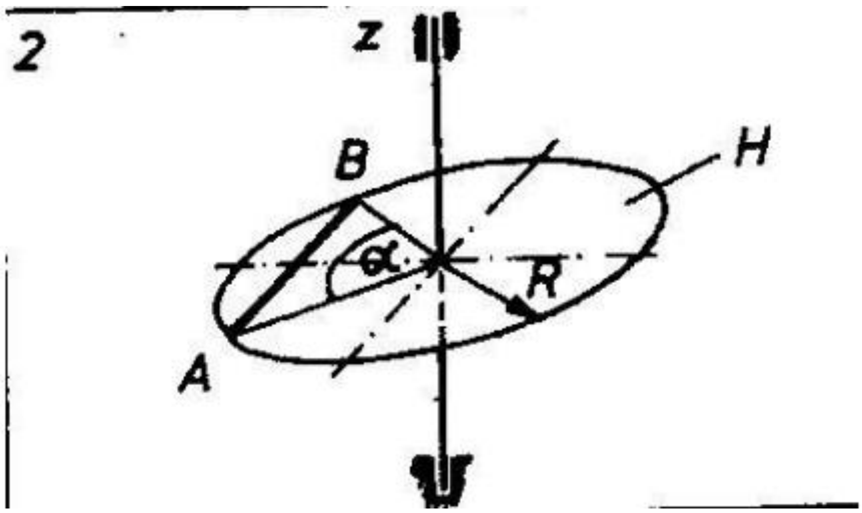
Kręt ciała sztywnego

W tym temacie będziemy posługiwać się pojęciem *krętu,* zwanego też momentem pędu czyli odpowiednika pędu dla ruchu obrotowego brył sztywnych. Zadania obejmujące tą tematykę składają się z dwóch części: pierwsze - gdy obrotowi poddana jest tarcza, a pozostałe elementy pozostają w spoczynku względem niej oraz część druga gdy rozważamy dodatkowo ruch względny masy po tarczy. Poniższy przykład powinien przedstawić Państwu metodykę rozwiązywania takich zadań.

Ciało H o masie m_H obraca się wokół pionowej osi $\boldsymbol{z}$ ze stałą prędkością kątową ω_0, przy czym w punkcie O wyżłobienia AB ciała H, w odległości AO od punktu A wzdłuż wyżłobienia, znajduje się materialny punkt L o masie m_L. W pewnej chwili ($t = 0$) na układ zaczyna działać para sił o momencie $M_z = f(t)$. W chwili $t = \tau$ działanie pary sił zostaje przerwane, a jednocześnie punkt L zaczyna ruch względny od punktu O wzdłuż wyżłobienia AB, w kierunku punktu B według wzoru $OL = s = f_2(t - \tau)$ dla $t > \tau$. Wyznaczyć prędkość kątową ciała H, gdy $t = \tau$ i $t = T$, pomijając opory obrotu ciała H. Ciało H traktować jako płytę o kształcie podanym na rysunkach poniżej, punkt L traktować jako samojezdny wózek.



Poniżej zestawiono dane do zadania:

$$m_H = 300\ kg$$

$$m_L = 60\ kg$$

$$\omega_0 = \ -2\ s^{-1}$$

$$R = 10\ m$$

$$\alpha = 120°$$

$$AO = 5\sqrt{3}$$

$$M_z = 1650\ Nm$$

$$\tau = 3\ s$$

$$T = 8\ s$$

$$OL = \sqrt{3}(t - \tau)$$

Zadanie rozwiążemy krok po kroku.

Uwaga!

- Kręt (K) === Moment pędu (L) oba wyrażenia można używać zamiennie. W poniższym rozwiązaniu będę pisał kręt, ze względu na krótsze brzmienie.

Krok 1. Analiza między 0 a 3 sekundą. Zasada zachowania krętu

We wstępie nadmieniono, że kręt jest wielkością analogiczną do pędu – pęd opisuje nam ruch prostoliniowy, zaś kręt opisuje ruch obrotowy. Dlatego, podobnie do zasady zachowania pędu, którą już poznaliśmy, można sformułować zasadę zachowania krętu (a właściwie posługujemy się czymś bardziej ogólnym – sama zasada ma miejsce gdy nie działają żadne momenty wtedy kręt się nie zmienia):

$$\frac{dK}{dt} = \sum M$$

Z zapisu powyższego wzoru wynika kilka wniosków:

- potrzebujemy określić jakie momenty działają na nasz układ ciał,
- a także potrzebujemy określić kręt układu.

Krok 1a. Analiza między 0 a 3 sekundą. Wyznaczenie sumy momentów

Analiza momentów nie powinna nastręczyć trudności. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że interesują nas jedynie te momenty które powodują obrót względem osi danej w zadaniu. Oczywiście siła ciężkości działająca na płytę, czy punkt materialny L albo siły reakcji łożysk też „generują" momenty – ale nie będziemy ich uwzględniać, bo nie są to momenty względem osi która nas interesują.

Zatem w naszym przypadku

$$\sum M = M_z = 1650\ Nm$$

Krok 1b. Analiza między 0 a 3 sekundą. Wyznaczenie sumy krętów

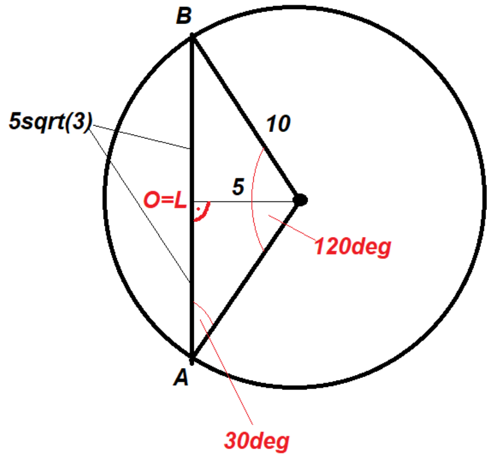
Na kręt układu składać się będą kręt pochodzący od płyty H oraz od punktu materialnego L

$$K = K_H + K_L$$

Punkt materialny L co prawda pozostaje w spoczynku względem tarczy (do 3 sekundy), ale obraca się wraz z całą tarczą z prędkością obrotową ω. Skorzystamy również z definicji momentu bezwładności $I = mr^2$.

$$K_L = I_L \cdot \omega(t) = m_L \cdot r_L^2 \cdot \omega(t)$$

Odległość r_L – to promień od osi do punktu L – zatem musimy wyznaczyć gdzie ten punkt się znajduje. W pierwszych 3 sekundach zgodnie z treścią zadania pokrywa on się z punktem O. Znajduje się on na odcinku AB w odległości $AO = 5\sqrt{3}$. Proponuję dokonać samodzielnego naszkicowania sobie tej sytuacji, dla ułatwienia poniżej znajdziecie rysunek, który powinien pomóc uporać się z tą sytuacją.



Sumarycznie mamy:

$$K_L = 60\,kg \cdot (5\,m)^2 \cdot \omega(t) = 1500\omega(t)\,kg \cdot m^2$$

W przypadku płyty stosujemy analogiczny wzór – tylko tym razem korzystając z sprawdzonego w tabelach wzoru na moment bezwładności walca.

$$K_H = I_H \cdot \omega(t) = \frac{1}{2} m_H R^2 \cdot \omega(t) = \frac{1}{2} 300 \cdot 10^2 \cdot \omega(t)\,kg \cdot m^2 = 15000 \cdot \omega(t)\,kg \cdot m^2$$

Zatem

$$K = K_H + K_L = 16500 \cdot \omega(t)\,kg \cdot m^2$$

Krok 1c. Analiza między 0 a 3 sekundą. Wyznaczenie wzoru na $\boldsymbol{\omega(t)}$

$$\frac{dK}{dt} = \sum M$$

$$\frac{d(16500 \cdot \omega(t))}{dt} = 1650\,[Nm = Nm]$$

W tym momencie zawsze dojdziemy do równania różniczkowego. Rozwiązuję się je stosunkowo prosto – to znaczy całkując obie strony po czasie. Proszę zwrócić uwagę na to, że w omawianym zadaniu moment jest funkcją stałą (jeśli chodzi o czas), nie zawsze tak będzie – może on mieć na przykład postać 10t albo $20t^2$. Wtedy należy odpowiednio wykorzystać znajomość całkowania.

$$16500 \cdot \omega(t) = \int 1650\,dt$$

$$\omega(t) = \frac{1650t}{16500} \cdot + C = 0{,}1t + C$$

Uwaga! Bardzo ważne jest aby nie zapomnieli Państwo o stałej całkowania. Jej pominięcie stanie się zarzewiem kłopotów, bo…

Wyznaczymy teraz stałą całkowania – korzystając z faktu, ze początkowo to znaczy w chwili $t = 0$ tarcza obracała się z prędkością początkową $\omega_0 = -2\,s^{-1}$.

$$-2\,s^{-1} = C$$

Ostatecznie wzór na prędkość obrotową wygląda tak:

$$\omega(t) = 0{,}1t - 2s^{-1}$$

Możemy teraz wyznaczyć prędkość obrotową w chwili $\tau = 3s$

$$\omega(3) = 0{,}3s^{-1} - 2s^{-1} = -1{,}7\ s^{-1}$$

Kręt w 3 sekundzie:

$$K(3) = 16500 \cdot -1{,}7 \ = \ 28\,050 \left[kg \cdot \frac{m^2}{s}\right]$$

Krok 2. Analiza między 3 a 8 sekundą. Zastanowienie się nad zmianą krętu.

W drugiej części zadania ustaje moment działający na płytę – a zatem wobec naszych wcześniejszych analiz możemy zapisać, że:

$$\sum M = 0 \rightarrow \frac{dK}{dt} = 0 \rightarrow K = constans$$

To bardzo ważny wniosek bo pozwala nam stwierdzić następujący fakt – w każdej sekundzie ruchu po 3 sekundzie (czyli gdy ustała siła) sumaryczny kręt układu się nie zmienia.

Zatem:

$$K(3) = K(8)$$

Krok 2a. Analiza między 3 a 8 sekundą. Obliczanie wyrażenia krętu w 8 sekundzie.

W drugiej części zadania, punkt materialny L dotychchzas tkwiący stale w punkcie O=L zaczyna się poruszać wzdłuż wyżłobienia AB. Spowoduje to zmiany w sposobie obliczania krętu dla tego punktu – oprócz krętu wynikającego z ruchu obrotowego K_{L_o} będzie miał też kręt wynikający z ruchu względnego - K_{L_w}. Zatem zapiszemy

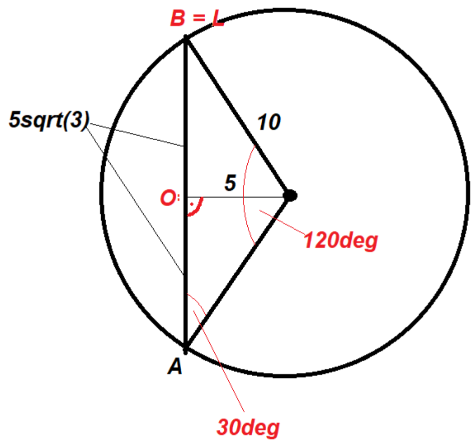
$$K_{L_o} = m_L \cdot r_L^2 \cdot \omega(t)$$

$$K_{L_w} = m_L \cdot v_w \cdot r_L = m_L \cdot \frac{d(OL)}{dt} \cdot r_L = m_L \cdot \frac{d\left(\sqrt{3}(t-\tau)\right)}{dt} \cdot r_L = \sqrt{3} m_L r_L$$

Oczywiście pewnym problem dla nas jest to, że tym razem r_L będzie zmienne bo punkt L się porusza. Dlatego wyznaczymy te wielkości tylko w interesującym nas punkcie w czasie – czyli 8 sekundzie.

Wtedy to :

$$OL = \sqrt{3}(8-3) = 5\sqrt{3}\ m$$



Zatem:

$$r_L = 10\ m$$

$$K_{L_O} = 6000\omega(8)\ [Nm]$$

$$K_{L_w} = 600\sqrt{3}\ [Nm]$$

Kręt płyty stale jest wyrażony tym samy wzorem więc przepiszemy go z wcześniejszej części zadania:

$$K_H = 15000 \cdot \omega(8)\ kg \cdot m^2$$

Sumaryczny kręt w 8 sekundzie:

$$K(8) = \left(21000 + 600\sqrt{3}\right)\omega(8)$$

<u>Krok 2b. Analiza między 3 a 8 sekundą. Wyznaczenie $\boldsymbol{\omega(8)}$</u>

Skoro $K(8) = K(3)$ to:

$$\left(21000 + 600\sqrt{3}\right)\omega(8) = \ 28\,050\ \left[kg \cdot \frac{m^2}{s} = kg \cdot \frac{m^2}{s}\right]$$

Stąd wyznaczamy $\omega(8)$.