15.5. Wyznaczanie przemieszczeń metodą Maxwella-Mohra. Sposób Wereszczagina

Weźmy pod uwagę dowolny płaski układ prętów obciążony wyłącznie siłami w swej płaszczyźnie. W prętach jako siły wewnętrzne wystąpią: siły podłużne N_i, siły poprzeczne T_i, momenty gnące M_{gi}. Energię każdego pręta, a raczej każdego przedziału wyrazimy w postaci

$$U_i = \int\limits_{(l_i)} \frac{N_i^2}{2E_iA_i} ds_i + \int\limits_{(l_i)} \frac{\beta_i T_i^2}{2G_iA_i} ds_i + \int\limits_{(l_i)} \frac{M_{gi}^2}{2E_iI_i} ds_i$$

Energię całego układu obliczymy sumując energię wszystkich prętów

$$U = \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{N_i^2}{2E_iA_i} ds_i + \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{\beta_i T_i^2}{2G_iA_i} ds_i + \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{M_{gi}^2}{2E_iI_i} ds_i$$

Chcąc wyznaczyć na podstawie twierdzenia *Castigliano* przemieszczenie w określonym miejscu i kierunku należy założyć w tymże miejscu działanie odpowiadającej poszukiwanemu przemieszczeniu siły F. Siła ta wywoła pojawienie się w prętach dodatkowych sił wewnętrznych. Jeżeli siły wewnętrzne spowodowane siłą F lecz o wartości 1 (jednostkową) oznaczymy przez M_g', N', T', to w przypadku ogólnym siły te będą równe FM_g', FN', FT'. Po uwzględnieniu dodatkowego obciążenia siłą F wzór na energię sprężystą układu przyjmuje postać

$$U = \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{(N_i+FN_i')^2}{2E_iA_i} ds_i + \sum_i \int\limits_{(l_i)} \beta_i \frac{(T_i+FT_i')^2}{2G_iA_i} ds_i + \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{(M_{gi}+FM_{gi}')^2}{2E_iI_i} ds_i$$

Wyznaczamy odpowiadające założonej sile F *przemieszczenie*

$$f = \frac{\partial U}{\partial F}$$

$$f = \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{N_i+FN_i'}{E_iA_i} N_i' ds_i + \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{\beta_i(T_i+FT_i')}{G_iA_i} T_i' ds_i + \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{M_{gi}+FM_{gi}'}{E_iI_i} M_{gi}' ds_i$$

Po podstawieniu rzeczywistej wartości $F = 0$ otrzymujemy

$$f = \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{N_iN_i'}{E_iA_i} ds_i + \sum_i \int\limits_{(l_i)} \beta_i \frac{T_iT_i'}{G_iA_i} ds_i + \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{M_{gi}M_{gi}'}{E_iI_i} ds_i$$

W przestrzennym układzie prętów w przypadku ogólnym jako siły wewnętrzne wystąpią: siły podłużne N_i, siły poprzeczne T_{yi} i T_{zi}, momenty gnące M_{gyi} i M_{gzi} i momenty skręcające M_{si}.

Uwzględniając te siły uzyskujemy ogólną formułę

$$f = \sum_i \int\limits_{(l_i)} \frac{N_iN_i'}{E_iA_i} ds_i + \sum_i \left(\int\limits_{(l_i)} \frac{\beta_{yi}T_{yi}T_{yi}'}{G_iA_i} ds_i + \int\limits_{(l_i)} \frac{\beta_{zi}T_{zi}T_{zi}'}{G_iA_i} ds_i \right) +$$

$$+ \sum_i \left(\int\limits_{(l_i)} \frac{M_{gyi}M_{gyi}'}{E_iI_y} ds_i + \int\limits_{(l_i)} \frac{M_{gzi}M_{gzi}'}{E_iI_z} ds_i \right) + \sum \int\limits_{(l_i)} \frac{M_{si}M_{si}'}{G_iJ_i} ds_i \qquad (15\text{-}17)$$

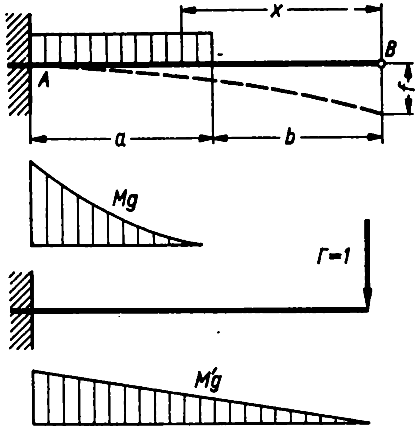
Zagadnienie 15-3

Wyznaczyć dla belki o stałej sztywności obciążonej jak na rys. 15-35 przemieszczenie f.

Do wyznaczenia przemieszczenia zastosujemy metodę *Maxwella-Mohra*. Momenty gnące rzeczywiste

$$\text{dla } 0 \leqslant x \leqslant b \qquad M_{g1} = 0$$

$$\text{dla } b \leqslant x \leqslant a+b \qquad M_{g2} = -q\frac{1}{2}(x-b)^2$$



Rys. 15-13

Momenty gnące od obciążenia siłą $F = 1$

$$M'_{g1} = -Fx = -x$$

$$M'_{g2} = -Fx = -x$$

Zgodnie z formułą (15-17)

$$f = \frac{1}{EI}\left(\int_0^b M_{g1}M'_{g1}\,\mathrm{d}x + \int_b^{a+b} M_{g2}M'_{g2}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$f = \frac{1}{EI}\int_b^{a+b} q\frac{1}{2}(x-b)^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{qa^3}{24EI}(3a+4b)$$

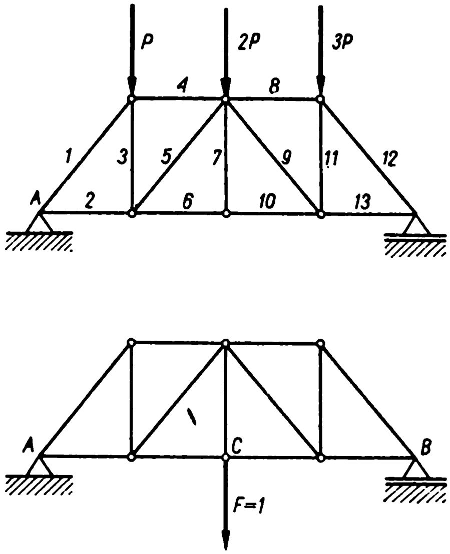
Zagadnienie 15-4

W kratownicy obciążonej siłami jak na rys. 15-14 ($P = 20\,000$ kG) wyznaczyć przemieszczenie f węzła C. Dla wszystkich prętów $E = 2{,}1\cdot10^6$ kG/cm².

Zastosujemy metodę *Maxwella-Mohra*

$$f = \sum_{i=1}^{13}\int_0^{l_i}\frac{N_iN'_i\,\mathrm{d}s_i}{E_iA_i} = \frac{1}{E}\sum_{i=1}^{13}\frac{N_iN'_il_i}{A_i}$$

Wyznaczamy napięcia w kratownicy rzeczywistej N_i i w kratownicy obciążonej w węźle C siłą $F = 1$ napięcia prętów N' (np. metodą wieloboku *Cremony*).



Rys. 15-14

$$\text{Wyznaczamy } f = \frac{1\,628\,091}{2{,}1 \cdot 10^6} = 0{,}77 \text{ cm}$$

Dane dotyczące prętów i wyniki ujęto w tablicy

Pręt	l_i metr	A_i cm^2	N_i 10^3 kG	N_i'	$\frac{N_i N_i' l_i}{A_i}$ $\frac{kG}{cm^2}$
1	3,9	60	−66,0	−0,650	278 850
2	2,5	36	42,4	0,416	122 488
3	3,0	27	30,0	0,500	166 663
4	2,5	36	42,4	−0,416	−122 488
5	3,9	27	−23,6	−0,650	221 587
6	2,5	60	67,2	0,833	233 240
7	3,0	20	0	1	0
8	2,5	50	58,4	−0,416	−121 472
9	3,9	20	−13,6	−0,650	172 380
10	2,5	60	67,2	0,833	233 240
11	3,0	20	9,0	0,500	67 500
12	3,9	90	−90,4	−0,650	254 627
13	2,5	50	58,4	0,416	121 473
				Razem	E f = 1 628 091

* * *

Posługiwanie się do wyznaczenia przemieszczeń metodą *Maxwella-Mohra* zamiast *Castigliano,* sprowadza się praktycznie po prostu do opuszczenia każdorazowego wypisywania wyrażeń na energię sprężystą i ich różniczkowania. Daje to pewną oszczędność w pracy. Metoda ta ogranicza się jednak do układów prętowych. Formuła *Castigljano* $\left(\frac{\partial U}{\partial P} = p\right)$ stosowalna do wszystkich układów liniowo-sprężystych posiada charakter ogólniejszy.

Obliczanie całek w metodzie *Maxwella-Mohra* można znacznie uprościć, jeżeli jeden z wykresów momentów (M_g lub M_g') jest prostoliniowy. Niech pole figury wykresu momentu M_g (rys. 15-15a) wynosi Ω, współrzędna zaś jej środka ciężkości x_s. Wykres natomiast M_g' przedstawia prostą (rys. 15-15b) o równaniu

$$y = M_g' = ax+b$$

wówczas

$$\int_0^l M_g M_g' \mathrm{d}x = \int_0^l M_g(ax+b)\mathrm{d}x = a\int_0^l M_g x\,\mathrm{d}x + b\int_0^l M_g \mathrm{d}x$$

Pierwsza całka wyraża moment statyczny figury momentów M_g względem osi y

$$\int_0^l M_g x\,\mathrm{d}x = \Omega x_s$$

Druga natomiast pole figury momentów $\int_0^l M_g\,\mathrm{d}x = \Omega$

$$\int_0^l M_g M_g' \mathrm{d}x = a\Omega x_s + b\Omega = \Omega(ax_s+b)$$

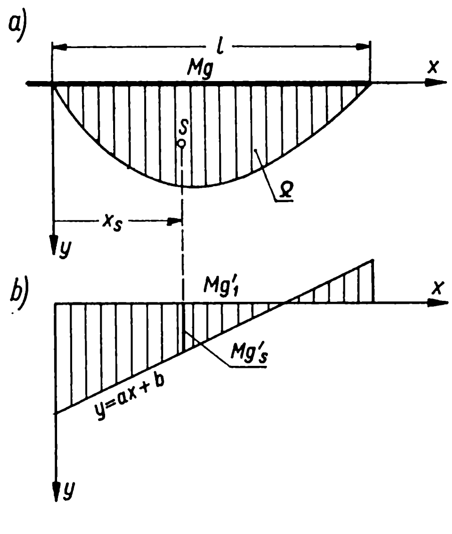
Wyrażenie zaś ax_s+b określa wartość momentu M_g' dla $x = x_s$

$$M'_{g(x=x_s)} = M'_{gs}$$

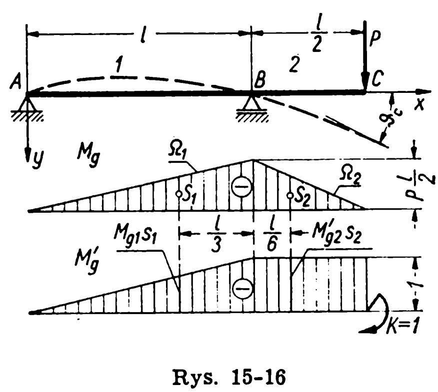
ostatecznie więc

$$\int_0^l M_g M_g' \mathrm{d}x = \Omega M'_{gs} \tag{15-18}$$

Podany tu sposób zwany niekiedy sposobem *Wereszczagina* stosować można niezależnie od tego, który z wykresów jest prostoliniowy, byleby mnożyć pole jednego wykresu przez rzędną drugiego wykresu liniowego dla odciętej odpowiadającej środkowi ciężkości figury pierwszego wykresu.



Rys. 15-15



Rys. 15-16

Zagadnienie 15-5

Dla belki o stałej sztywności EI obciążonej jak na rys. 15-16 wyznaczyć sposobem *Wereszczagina* kąt ugięcia w punkcie C

$$\vartheta_c = \frac{1}{EI}\left[\int_0^l M_{g1}M'_{g1}dx + \int_l^{\frac{3}{2}l} M_{g2}M'_{g2}dx\right]$$

Całkę w przedziale 1. obliczymy mnożąc pole figury wykresu M_g w pierwszym przedziale przez rzędną $M_{g1}S_1$ w wykresie M_g odpowiadającą środkowi ciężkości S_1 figury wykresu M_g w pierwszym przedziale. Podobnie obliczamy całkę w drugim przedziale

$$\vartheta_c = \frac{1}{EI}[\Omega_1 M'_{g1}S_1 + \Omega_2 M'_{g2}S_2]$$

podstawiamy

$$\Omega_1 = \frac{Pl^2}{4} \qquad M'_{g1}S_1 = \frac{2}{3} \qquad \Omega_2 = \frac{Pl^2}{8} \qquad M'_{g2}S_2 = 1$$

i otrzymujemy

$$\vartheta_c = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pl^2}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{Pl^2}{8}\cdot 1\right]$$

$$\vartheta_c = \frac{7}{24}\frac{Pl^2}{RI}$$

(Porównaj zagadnienie 15-2).

15.6. Zasada najmniejszości energii Menabrea-Castigliano

Wskutek obciążenia układu siłami czynnymi P_i w podporach (więzach) powstaną reakcje R_i.

Jeżeli podparcie jest sztywne i bez tarcia, to przemieszczenie odpowiadające reakcji wynosi zero. Korzystając z twierdzenia *Castigliano* możemy to wyrazić w następującej postaci

$$\frac{\partial U}{\partial R_i} = 0 \tag{15-19}$$

Należy jednak zauważyć, że wszystkie siły czynne i bierne są związane ogólnymi warunkami równowagi. Dlatego za zmienne niezależne mogą być uważane wyłącznie reakcje w układach statycznie niewyznaczalnych, określone jako statycznie niewyznaczalne nadliczbowe. Formułę 15-19 możemy zastosować tylko do wielkości podporowych statycznie niewyznaczalnych, wyraża ona twierdzenie *Menabrea* [1]*-Castigliano: w układzie liniowo sprężystym sztywnie podpartym pochodna cząstkowa energii sprężystej całego układu względem wielkości podporowej — statycznie niewyznaczalnej jest równa zero.*

Spełnienie równania 15-19 jest równocześnie warunkiem ekstremum energii sprężystej (jako funkcji wielkości podporowej statycznie niewyznaczalnej).

Ekstremum to może być tylko minimum, gdyż jak wykazano w punkcie 15-4 druga pochodna energii sprężystej względem niezależnie działającej siły jest zawsze dodatnia.

---

[1] *Luigi F. Menabrea* (1809 † 1896) inżynier, generał, dyplomata włoski — ogłosił swą zasadę 1857, wyczerpującego dowodu dostarczył *A. Castigliano.*