Obliczanie ugięć

dr hab. inż. Tadeusz Chyży
Katedra Mechaniki Konstrukcji

Metody:

•Metoda linii ugięcia, w tym metoda Clebscha,

•Metoda Mohra – momentów wtórnych,

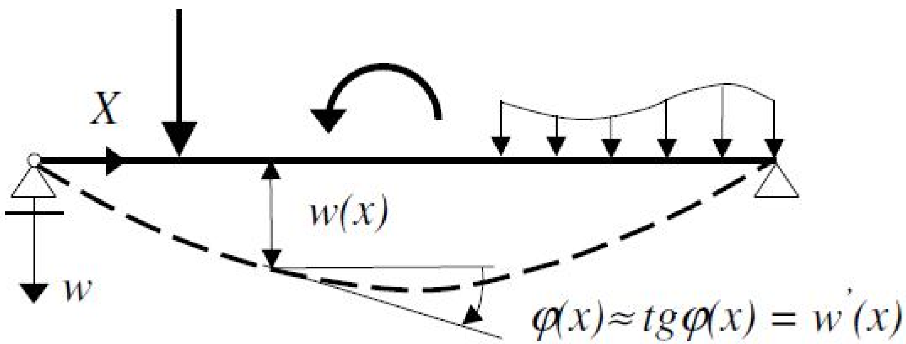
•Metoda Maxwella-Mohra, jako modyfikacja metody Castiliano (z grupy metod energetycznych),

•Inne: metoda przemieszczeń, metoda elementów skończonych, metody graficzne, metody tablicowe, itp.

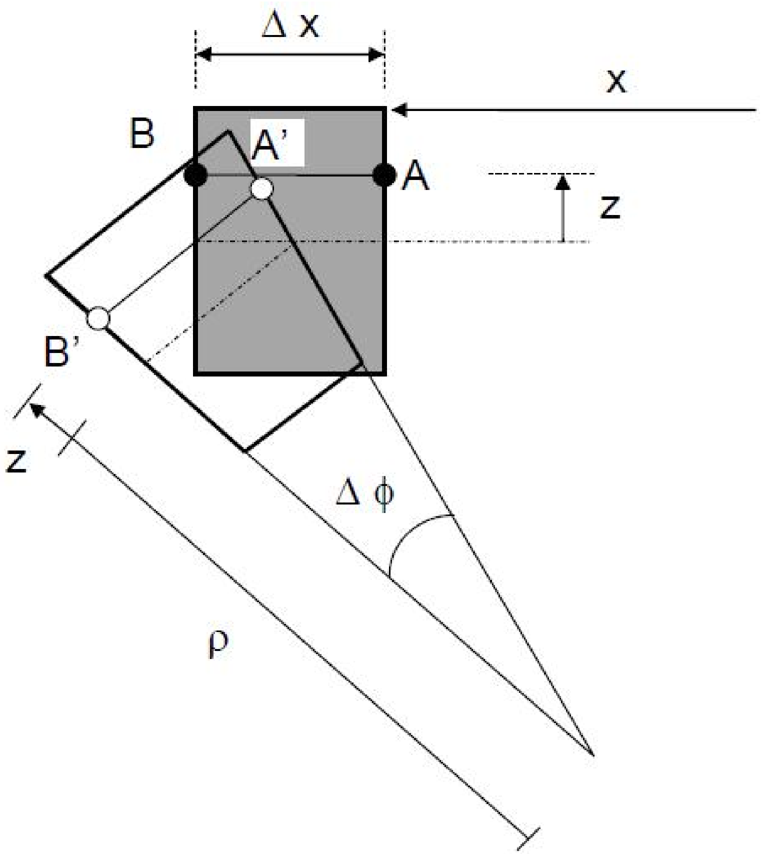
Hipoteza płaskich przekrojów (hipoteza Bernouliego)

przekrój poprzeczny pręta, płaski i prostopadły do osi pręta przed odkształceniem, pozostaje w wyniku deformacji nadal płaski i prostopadły do ugiętej osi pręta

Teoria małych przemieszczeń



Metoda linii ugięcia



$$\varepsilon_x = \lim_{A \to B} \frac{A'B' - AB}{AB}$$

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{(\rho + z)\,\Delta\phi - \rho\,\Delta\phi}{\Delta\phi} = \frac{z}{\rho}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M}{E I_y} z$$

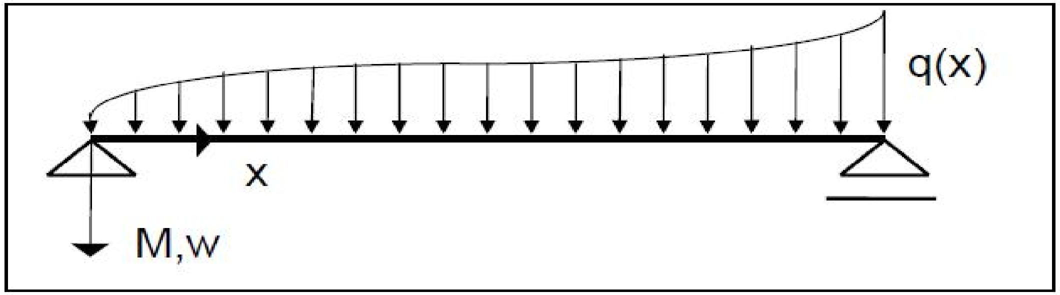
$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E I_y}$$

$$\kappa(x) \equiv \frac{1}{\rho(x)} = \frac{|w''(x)|}{\left[1 + w'^2(x)\right]^{3/2}} \cong |w''(x)|$$

$$\boxed{E I_y\, |w''(x)| = M(x)}$$

Metoda momentów (obciążeń) wtórnych – metoda Mohra

metoda oparta na formalnej analogii między równaniami różniczkowymi momentów zginających $M(x)$ i równaniem różniczkowym ugiętej osi belki $w(x)$



$$M''(x) = -q(x)$$

$$M'(x) = \int_0^x -q(x)\,dx + A \equiv Q(x)$$

$$M(x) = \int_0^x \left[\int_0^x -q(x)\,dx \right] dx + A\,x + B$$

+ statyczne warunki brzegowe

$M(\ ) = \ldots\ldots\ldots$

$Q(\ ) = \ldots\ldots\ldots$

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$$

$$w'(x) = \int_0^x -\frac{M(x)}{EI}\,dx + C$$

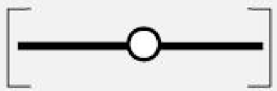
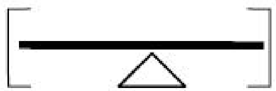
$$w(x) = \int_0^x \left[\int_0^x -\frac{M(x)}{EI}\,dx \right] dx + C\,x + D$$

+ kinematyczne warunki brzegowe

$w(\ ) = \ldots\ldots\ldots$

$w'(\ ) = \ldots\ldots\ldots$

Dobór belki fikcyjnej dla belki rzeczywistej.

BELKA RZECZYWISTA		BELKA FIKCYJNA	
war. kinematyczne	**schemat**	**schemat**	**war. statyczne**
$w \neq 0 \quad , \quad w' \neq 0$			$M^f \neq 0 \quad , \quad Q^f \neq 0$
$w = 0 \quad , \quad w' = 0$			$M^f = 0 \quad , \quad Q^f = 0$
$w = 0 \quad , \quad w' \neq 0$			$M^f = 0 \quad , \quad Q^f \neq 0$
$w \neq 0 \quad , \quad w'_L \neq w'_P$			$M^f \neq 0 \quad , \quad Q^f_L \neq Q^f_P$
$w \neq 0 \quad , \quad w' = 0$			$M^f \neq 0 \quad , \quad Q^f = 0$

Algorytm postępowania w przypadku obliczania ugięć metodą Mohra.

1. Narysować wykres momentów zginających dla belki rzeczywistej (jest to obciążenie fikcyjne belki fikcyjnej)
2. Narysować schemat belki fikcyjnej
3. Nanieść wykres momentów zginających na belkę fikcyjną w taki sposób, aby momenty „dodatnie", tzn. leżące po stronie przyjętych „spodów" były skierowane zgodnie z przyjętym za dodatni zwrotem osi ugięć.
4. Rozwiązać w „standardowy" sposób belkę fikcyjną .

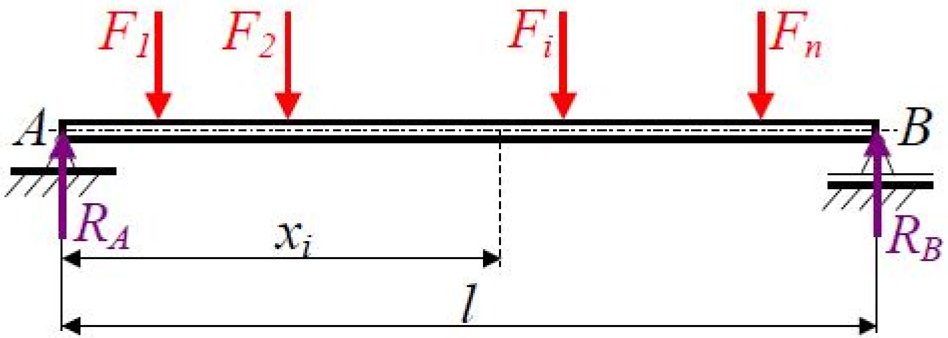
Ugięcia osi belki $\boxed{w = M^f}$

Kąty obrotu osi belki $\boxed{w' = Q^f}$

Metoda Maxwella-Mohra

Dotychczas omówione metody w przypadku układów złożonych należą do zbyt pracochłonnych, znaczne uproszczenie obliczeń można uzyskać wprowadzając modyfikację metody Castigliano zwaną metodą Maxwella-Mohra. Do jej wyprowadzenia, załóżmy tymczasowo, że energia sprężysta układu pochodzi tylko od momentów gnących.

Rozważmy belkę spoczywającą na podporze przegubowej A i podporze przesuwnej B, obciążoną siłami F_1, F_2, …., F_i, …., F_n.



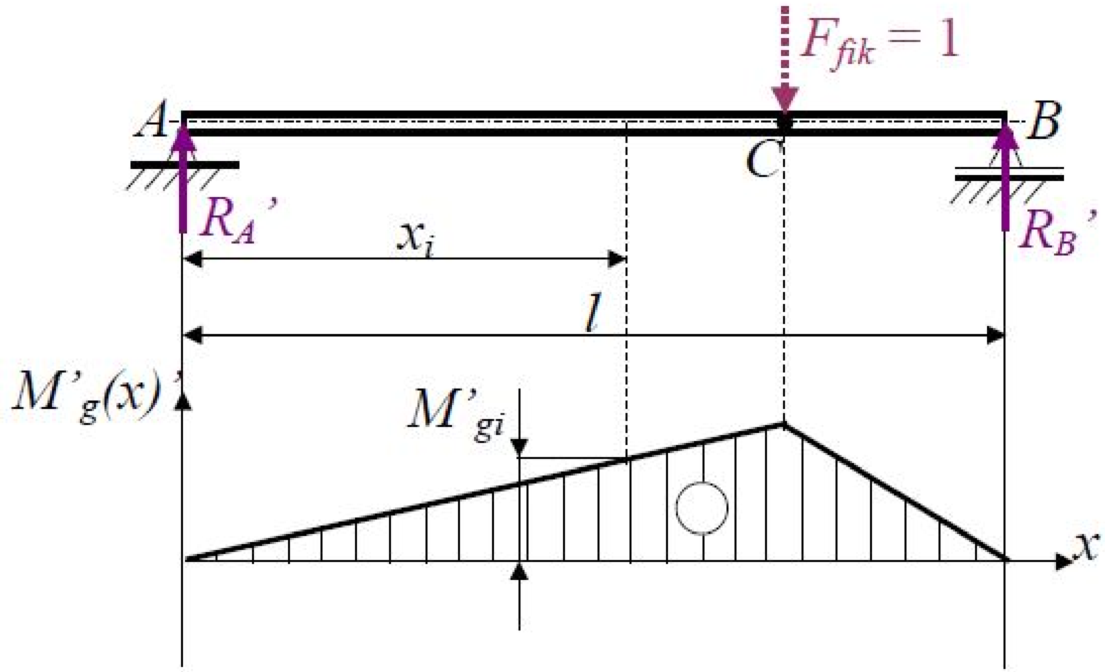
Energia sprężysta belki w przedziale i wynosi:

$$V_i = \int_{l_i} \frac{1}{2EI} M_{gi}^{\,2} dx_i$$

gdzie:

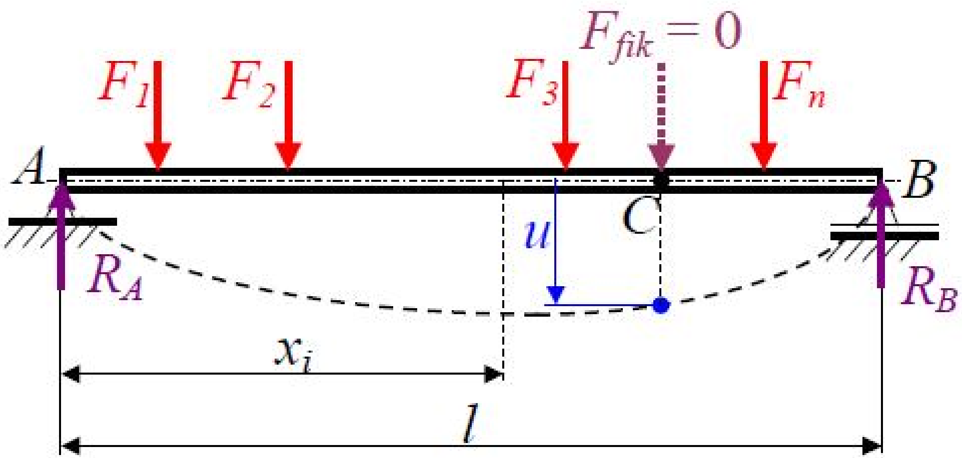
M_{gi} – moment gnący w przekroju określonym współrzędną x_i belki. Symbol l_i przy znaku całki oznacza całkowanie na długości przedziału x_i belki

Rozpatrzmy teraz tę samą belkę obciążoną w punkcie C jednostkową siłą fikcyjną $F_{fik} = 1$. Dla tak obciążonej belki można łatwo wyznaczyć wykres momentów gnących. W przekroju określonym współrzędną x_i moment gnący oznaczamy jako M'_{gi}. Dla dowolnej wartości siły F_{fik} moment gnący w przekroju x_i belki wyniesie $M'_{gi}F_{fik}$.



Jeżeli teraz do układu zasadniczego wprowadzimy w punkcie C siłę fikcyjną F_{fik}, to moment gnący, zgodnie z zasadą superpozycji, w przekroju określonym współrzędną x_i belki wyniesie $M_{gi} + M'_{gi}F_{fik}$. Wartość energii sprężystej w przedziale i określi wówczas zależność:

$$V_i = \int_{l_i} \frac{1}{2EI} \left(M_{gi} + M'_{gi} F_{fik} \right)^2 dx_i$$



Jeśli uwzględni się, że energia sprężysta w całej belce jest sumą energii dla wszystkich przedziałów, to ugięcie u w przekroju C belki, zgodnie z twierdzeniem Castigliano wynosi:

$$u=\int_0^l \frac{1}{EI}\left(M_g + M'_g F_{fik}\right)M'_g dx$$

Ponieważ w rzeczywistości siła fikcyjna F_{fik} jest równa zeru ($F_{fik} = 0$) to otrzymujemy wyrażenie zwane wzorem Maxwella-Mohra:

$$u=\int_0^l \frac{M_g M'_g}{EI} dx$$

Reasumując, zgodnie z metodą Maxwella-Mohra wyznaczenie przemieszczenia u, sprowadza się do obliczenia całki, pod znakiem której występuje moment gnący spowodowany rzeczywistym obciążeniem zewnętrznym M_g, oraz moment gnący jaki wywołałaby jednostkowa siła fikcyjna ($F_{fik} = 1$) odpowiadającą temu przemieszczeniu M'_g.

Nietrudno udowodnić, że jeśli energia sprężysta układu będzie zależeć od następujących obciążeń zewnętrznych N, M_s, M_{gy}, M_{gz}, T_y, T_z, to przemieszczenie u, będzie określone następującą zależnością:

$$u = \int_0^l \left(\frac{NN'}{EA} + \frac{M_S M'_S}{GI_S} + \frac{M_{gy} M'_{gy}}{EI_y} + \frac{M_{gz} M'_{gz}}{EI_Z} + \frac{\beta_y T_y T'_y}{GA} + \frac{\beta_z T_z T'_z}{GA} \right) dx$$

gdzie:

N', M'_s, M'_{gy}, M'_{gz}, T'_y, T'_z, – odpowiednie składowe sił wewnętrznych przy obciążeniu fikcyjnym wynoszącym $F_{fik} = 1$.