Równanie kanoniczne metody sił (na podst. WM, Jakubowicz/Orłoś)

Przypuśćmy, że mamy dany układ liniowo-sprężysty obciążony siłami zewnętrznymi P_1, P_2, P_3, trzykrotnie zewnętrznie niewyznaczalny.

Jako wielkości hiperstatyczne obraliśmy X, Y, Z. Wyznaczmy energię sprężystą jako sumę prac niezależnych sił P_1, P_2, P_3, X, Y, Z.

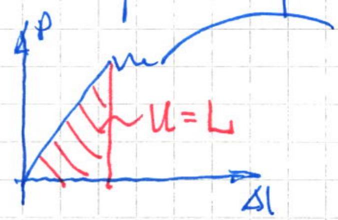
Uwzględniając, że

$$L_i = \frac{1}{2} P_i \cdot p_i$$

P_i – uogólniona siła

p_i – uogólnione przemieszczenie

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot p_i$$



$$p_i = \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot \delta_{ik}$$

$$U = L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P_i \cdot P_k \cdot \delta_{ik}$$

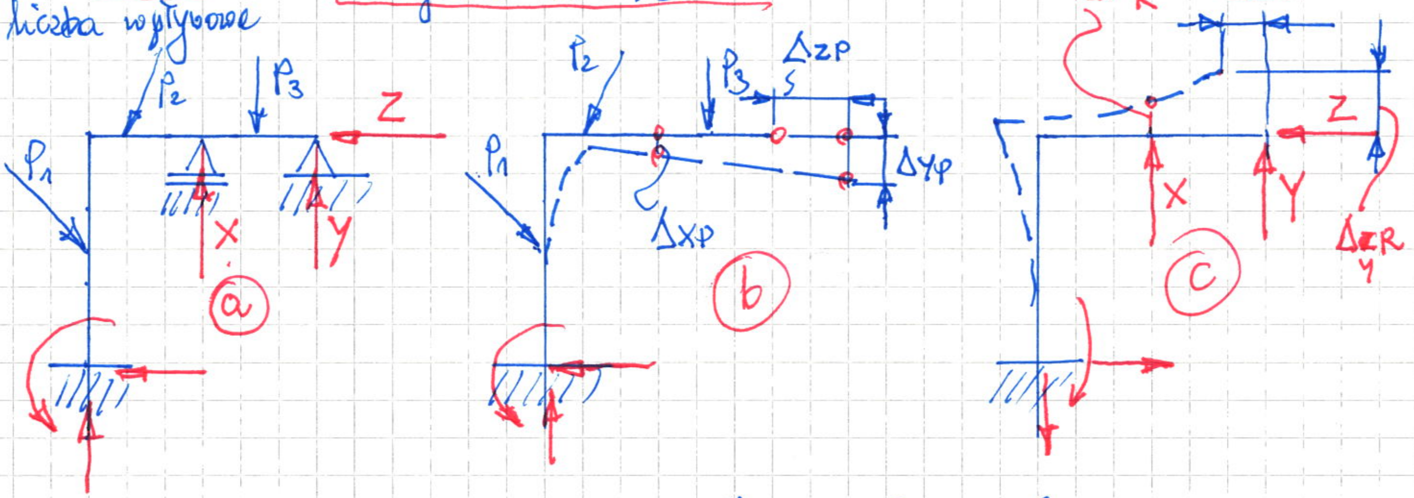
jednorodna kwadratowa funkcja obciążeń

$$U = L = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l, \quad \Delta l = \frac{P \cdot l}{EA}$$

$$U = L = \frac{1}{2} P \cdot \frac{P \cdot l}{EA} = \frac{1}{2} \frac{P^2 \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\boxed{\delta_{ik} = \frac{\text{uogólnione przemieszczenie}}{\text{uogólniona siła}}} \qquad \boxed{\delta_{ik} = \delta_{ki}}$$

liczba wpływowa



$$U = \frac{1}{2}\left(X^2\delta_{xx} + Y^2\delta_{yy} + Z^2\delta_{zz} + P_1^2\delta_{11} + P_2^2\delta_{22} + P_3^2\delta_{33}\right) +$$

$$X \cdot Y\delta_{xy} + Y \cdot Z\delta_{yz} + Z \cdot X\delta_{zx} + X P_1 \cdot \delta_{x1} + X P_2 \delta_{x2} + X P_3 \delta_{x3}$$

$$+ Y P_1 \delta_{y1} + Y P_2 \cdot \delta_{y2} + Y P_3 \cdot \delta_{y3} + Z P_1 \cdot \delta_{z1} + Z P_2 \cdot \delta_{z2} + Z P_3 \cdot \delta_{z3} +$$

$$+ P_1 \cdot P_2 \delta_{12} + P_2 \cdot P_3 \cdot \delta_{23} + P_3 \cdot P_1 \cdot \delta_{31}$$

Zasada najmniejszości energii (minimum energii)

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = X\delta_{xx} + Y\delta_{xy} + Z\delta_{xz} + P_1\delta_{x1} + P_2\delta_{x2} + P_3\delta_{x3} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = X\delta_{yx} + Y\delta_{yy} + Z\delta_{yz} + P_1\delta_{y1} + P_2\delta_{y2} + P_3\delta_{y3} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = X\delta_{zx} + Y\delta_{zy} + Z\delta_{zz} + P_1\delta_{z1} + P_2\delta_{z2} + P_3\delta_{z3} = 0$$

Oznaczmy:

$$P_1\delta_{x1} + P_2\delta_{x2} + P_3\delta_{x3} = \Delta_{XP}$$
$$P_1\delta_{y1} + P_2\delta_{y2} + P_3\delta_{y3} = \Delta_{YP}$$
$$P_1\delta_{z1} + P_2\delta_{z2} + P_3\delta_{z3} = \Delta_{ZP}$$

przemieszczenia wywołane działaniem sił czynnych P_1, P_2, P_3

Z kolei:

$$X\delta_{xx} + Y\delta_{xy} + Z\delta_{xz} = \Delta_{XR}$$
$$X\delta_{yx} + Y\delta_{yy} + Z\delta_{yz} = \Delta_{YR}$$
$$X\delta_{zx} + Y\delta_{zy} + Z\delta_{zz} = \Delta_{ZR}$$

Ostatecznie

$$X\delta_{xx} + Y\delta_{xy} + Z\delta_{xz} + \Delta_{XP} = 0$$
$$X\delta_{yx} + Y\delta_{yy} + Z\delta_{yz} + \Delta_{YP} = 0$$
$$X\delta_{zx} + Y\delta_{zy} + Z\delta_{zz} + \Delta_{ZP} = 0$$

równanie kanoniczne metody sił dla ramy

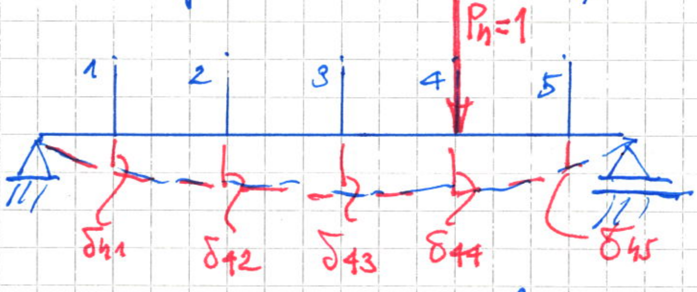
Można dalej: $X = X_1$, $Y = X_2$, $Z = X_3$, itd.

bardziej ogólnie

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}\cdot X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}\cdot X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0$$
$$\vdots$$
$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0$$

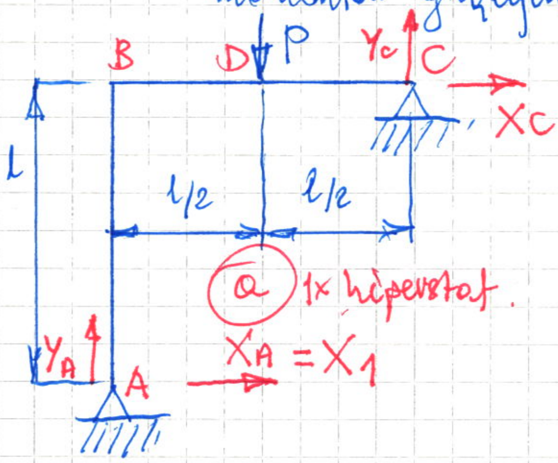
układ równań kanonicznych metody sił

Liczby wpływowe – jako odpowiednie przemieszczenie układu statycznie wyznaczalnego pod oddzielnym działaniem sił, odpowiednio: $X = 1$, $Y = 1$, $Z = 1$



$\delta_{41} = \delta_{14}$, itd.

Ex. 1. Stosując metodę sił (force method) wyznaczyć wykres momentów gnących dla ramy (a)



- rama jednokrotnie hiperst.

(I) warunki statyki

(1) $\sum P_{ix} = X_A + X_C = 0 \qquad X_A = -X_C$

(2) $\sum P_{iy} = Y_A - P + Y_C = 0$

(3) $\sum M_i^C = Y_A \cdot l - X_A \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0$

4 reakcje - 3 warunki statyki

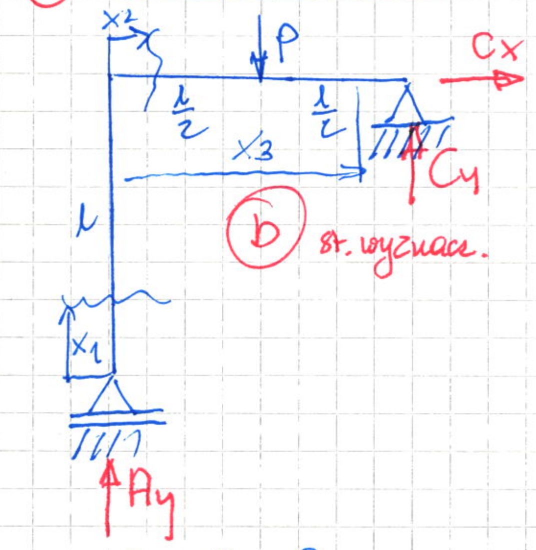
$\Rightarrow$ 1x hiperstat.

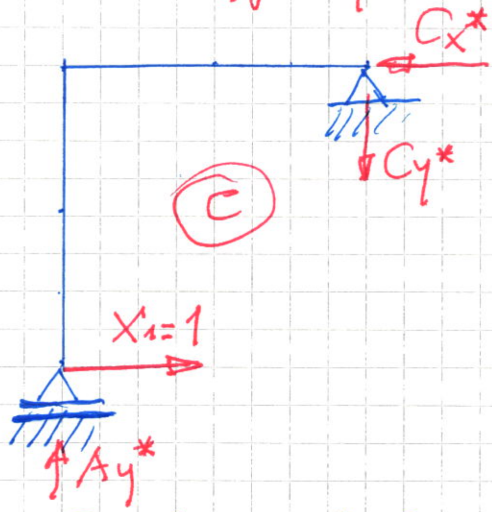
$X_A = X_1$ - wielkość hiperstatyczna

Równanie kanoniczne metody sił w tym przypadku

(4) $\boxed{X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0}$

(tylko energia od zginania bez rozciągania/ściskania)





(1) $\sum P_{ix} = C_x = 0$

(2) $\sum P_{iy} = A_y - P + C_y = 0$

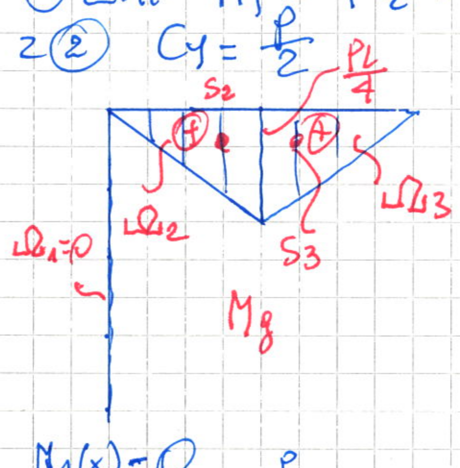
(3) $\sum M_i^C = A_y \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{P}{2}$

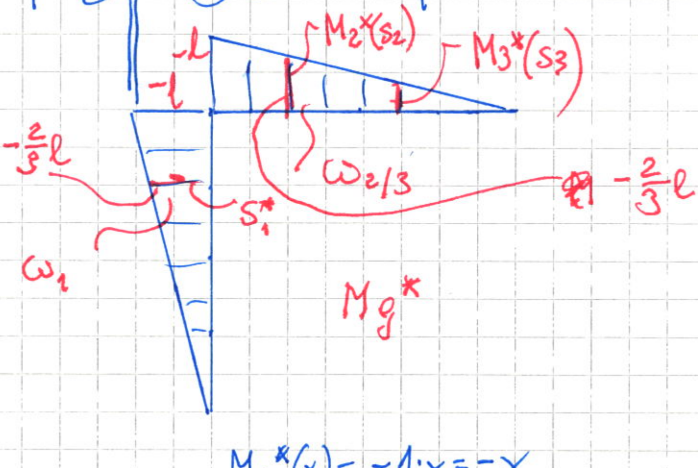
z (2) $C_y = \frac{P}{2}$

(1) $\sum P_{ix} = \cancel{-C_x^* = 0} \qquad 1 - C_x^* = 0 \Rightarrow C_x^* = 1$

(2) $A_y^* - C_y^* = 0$

(3) $\sum M_i^C = A_y^* \cdot l - 1 \cdot l = 0 \qquad A_y^* = 1 = C_y^*$





$M_1(x) = 0$

$M_2(x) = A_y \cdot x = \frac{P}{2} \cdot x$

$M_2(0) = 0, \quad M_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$

$M_1^*(x) = -1 \cdot x = -x$

Do wyznaczenia : Δ_{1P} , δ_{11} zastosować metodę MM, sposób Wereszczagina

$\Delta_{1P} \Rightarrow (b) + (c)$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^l M_1(x)\cdot M_1^*(x)dx + \int_0^{\frac{l}{2}} M_2(x)\cdot M_2^*(x)\,dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} M_3(x)\cdot M_3^*(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\Omega_1\cdot M_1^*(s_1) + \Omega_2\cdot M_2^*(s_2) + \Omega_3\cdot M_3^*(s_3)\right] =$$

$\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \Omega_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{16}$

$M_1^*(s_1) = l$, $M_2^*(s_2) = -\frac{2}{3}l$, $M_3^*(s_3) = -\frac{1}{3}l$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left[0 + \frac{Pl^2}{16}\cdot\left(-\frac{2}{3}l\right) + \frac{Pl^2}{16}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = -\frac{Pl^3}{16EI}$$

$\delta_{11} \Rightarrow (c) + (c)$

$\cancel{\delta_{11}} =$ $\omega_1 = \omega_{2/3} = \frac{1}{2}\cdot l\,(-l) = -\frac{l^2}{2}$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\omega_1\cdot M g_1^*(s_1) + \omega_{2/3}\cdot M g_{2/3}^*(s_{2/3})\right] =$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\left(-\frac{l^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}l\right) + \left(-\frac{l^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}l\right)\right] = \frac{2}{3}\frac{l^3}{EI}$$

(4) $X_1\cdot\frac{2}{3}\frac{l^3}{EI} - \frac{Pl^3}{16EI} = 0 \quad \Big|\cdot 48EI$

$32X_1 - 3P = 0 \Rightarrow$ $\boxed{X_1 = X_A = \frac{3}{32}P}$

Z warunków statyki

z (1) $X_A + X_C = 0 \Rightarrow X_C = -X_A = -\frac{3}{32}P$

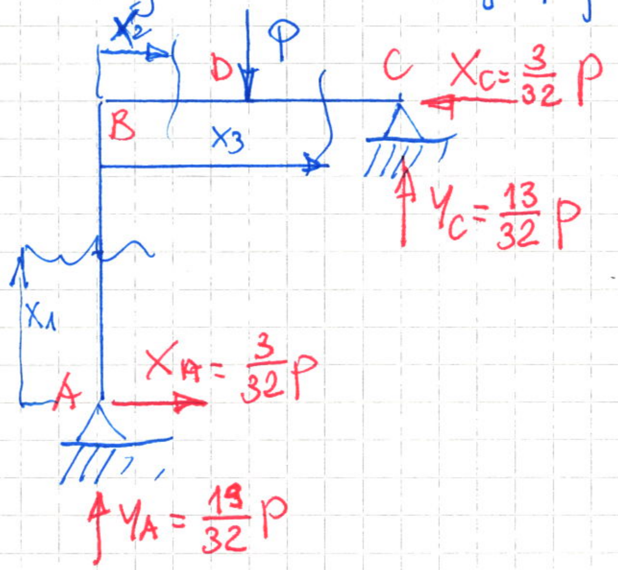
z (3) $Y_A\cdot l - X_A\cdot l - P\frac{l}{2} = 0$

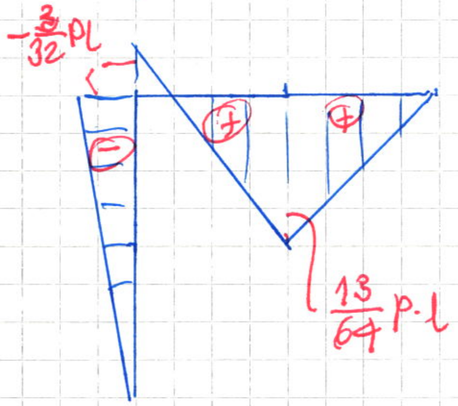
$Y_A\cdot l - \frac{3}{32}P\cdot l - \frac{Pl}{2} = 0 \qquad Y_A\cdot l = \frac{Pl}{2} + \frac{3Pl}{32} = \frac{19}{32}P\cdot l$

$Y_A = \frac{19}{32}P$

z (2) $Y_A - P + Y_C = 0 \qquad Y_C = P - Y_A = P - \frac{19}{32}P = \frac{13}{32}P$

Wykres momentów gnących





$0 \le x_1 \le l$

$M_1(x) = -X_A \cdot x$

$M_1(0) = 0, \quad M_1(l) = -\frac{3}{32}P\cdot l$

$0 \le x_2 \le \frac{l}{2}$

$M_2(x) = -\frac{3}{32}\cdot Pl + \frac{19}{32}\cdot P\cdot x$

$M_2(0) = -\frac{3}{32}P\cdot l$

$M_2\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{3}{32}P\cdot l + \frac{19}{32}P\cdot\frac{l}{2} = \frac{13}{64}P\cdot l$

$\frac{l}{2} \le x_3 \le l$

$M_3(x) = -\frac{3}{32}Pl + \frac{19}{32}\cdot P\cdot x - P\left(x - \frac{l}{2}\right)$

$M_3\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{13}{64}Pl$

$M_3(l) = -\frac{3}{32}P\cdot l + \frac{19}{32}\cdot P\cdot l - \frac{Pl}{2} = 0$