Rozciąganie i ściskanie

Obszar:
- wytrzymałość Materiałów (stereomech.)
- Ciało odkształcalne
- sprężystość, plastyczność, itd.

① Ze względu na ilość niewiadomych sił zewnętrznych bądź wewnętrznych w stosunku do ilości warunków równowagi statycznej rozróżniamy układy <u>izostatyczne</u> czyli statycznie wyznaczalne <u>i hiperstatyczne</u>, czyli statycznie niewyznaczalne

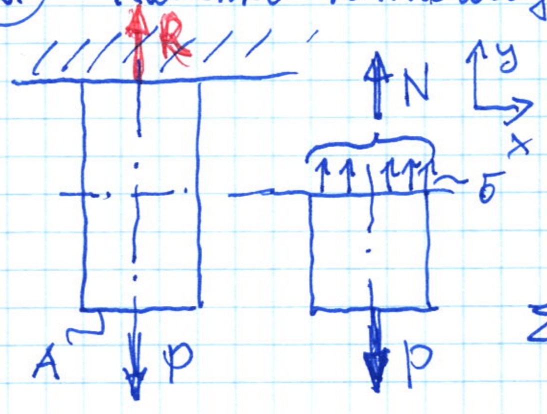
<u>Układem hiperstatycznym</u> nazywamy taki element konstrukcyjny (układ), w którym ilość niewiadomych sił jest większa od ilości równań statyki. W układzie takim niewiadomych sił nie można zatem wyznaczyć z samych warunków statyki.

Układ jest <u>zewnętrznie hiperstatyczny</u> – niewyznaczalne (niewiadome) są siły zewnętrzne (reakcje)

Układ jest <u>wewnętrznie hiperstatyczny</u>, jeżeli niewyznaczalnymi (niewiadomymi) są siły wewnętrzne lub naprężenia.

Przykłady: 1) naprężenia montażowe, 2) napr. termiczne

② Warunki równowagi (statyki)

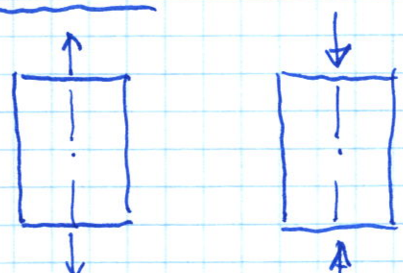


Założenie:
- siła P w każdym przekroju wywołuje siłę N (w przekroju normalnym)
- występują naprężenie (σ) i zakłada się, że

$$\Sigma P_{iy} = P - N = 0 \qquad \int_A \sigma \cdot dA - N = 0$$

$$\boxed{\int_A \sigma \cdot dA = N}$$

<u>Umowa</u>

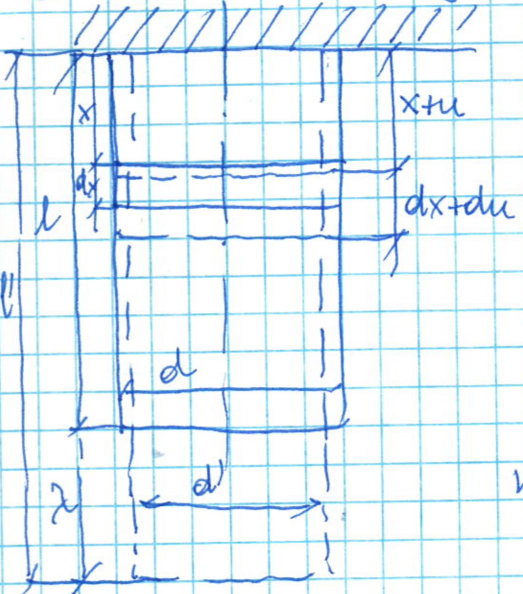


rozciąganie (dodatnie) ściskanie (ujemne)

Ogólnie potrzebne są:
- warunki statyki
- war. geometryczne
- warunki fizyczne

ang:
ε – longitudinal strain
ε_1 – transverse strain

3. Warunki geometryczne



• – wydłużenie względne

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \varepsilon} \quad \text{def.}$$

• $\Delta l = \lambda = l' - l$ wydł. bezwzględne

$$\lambda = u_{x=l} = \int_0^l \varepsilon\, dx = \varepsilon \cdot l$$

$= \int \frac{du}{dx} dx$

wówczas $\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{\Delta l}{l}$ longitudinal strain

• $\boxed{\varepsilon' = \frac{d'-d}{d}}$ (dla rozciągania $d > d'$ i $\varepsilon' < 0$

warunki fizyczne

• $\boxed{\varepsilon = \sigma \frac{1}{E}}$ prawo Hooke'a

$\boxed{\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon}$ $\quad \frac{1}{6} < \nu < \frac{1}{2}$ $\quad \nu = 0,3$ (dla stali)

ε' – transverse strain = lateral strain

ale $\sigma = \frac{N}{A}$ wówczas

$$\lambda = \Delta l = \int_0^l \varepsilon\, dx = \int_0^l \frac{\sigma}{E} dx = \int_0^l \frac{N}{AE} dx$$

ratio of the change of diameter to its diameter

$$\lambda = \Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}$$

EA – sztywność na rozciąganie (ściskanie)

$\frac{EA}{l}$ – sztywność jednostkowa

stiffness
unit stiffness

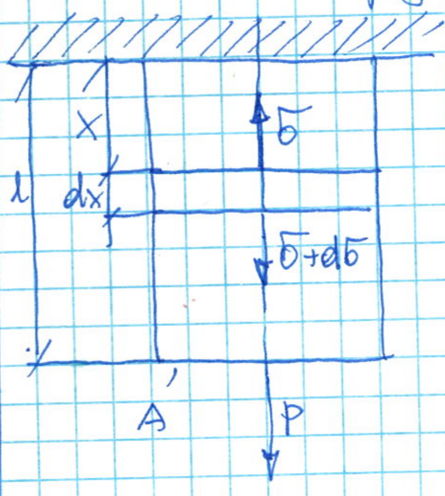
γ – specific gravity
specific weight

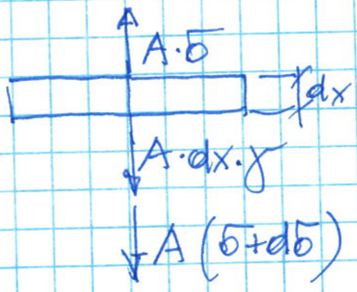
4) Wpływ ciężaru własnego na naprężenia

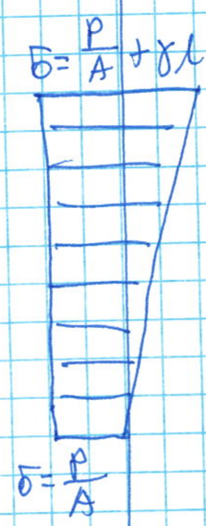
- dotychczas uwzględniano tylko obciążenia zewnętrzne
- dodatkowo wpływ ciężaru

Dane: P, A, l, γ

$\sigma(x),\ \varepsilon(x)$ - ?







Równanie równowagi

$$A(\sigma + d\sigma) + A\gamma dx - A\cdot\sigma = 0$$
$$\cancel{A\sigma} + Ad\sigma + A\cdot\gamma\, dx - \cancel{A\cdot\sigma} = 0$$
$$d\sigma = -\gamma\cdot dx$$
$$\boxed{\sigma = -\gamma x + C}$$

γ - specific weight

ale z warunku równowagi wiadomo, że

$$\sigma_{x=l} = \frac{P}{A} \quad \text{czyli} \quad \frac{P}{A} = -\gamma l + C \Rightarrow C = \frac{P}{A} + \gamma l,$$

$$\sigma = -\gamma x + \frac{P}{A} + \gamma l \qquad \boxed{\sigma = \frac{P}{A} + \gamma(l-x)} \text{ stan napr.}$$

Stan odkształcenia

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{A} + \gamma(l-x)\right]$$

$$\lambda = \Delta l = \int_0^l \varepsilon\, dx = \frac{1}{E}\int_0^l \left[\frac{P}{A} + \gamma(l-x)\right]dx = \frac{1}{E}\left[\frac{P}{A}x + \gamma l x - \gamma\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^l =$$

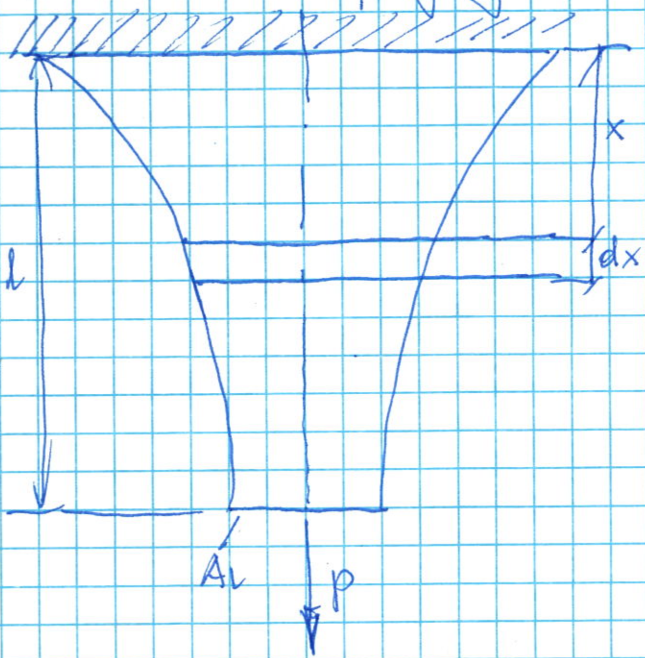
$$\lambda = \Delta l = \frac{1}{E}\left[\frac{Pl}{A} + \gamma l^2 - \gamma\frac{l^2}{2}\right] = \frac{1}{E}\left[\frac{Pl}{A} + \gamma\frac{l^2}{2}\right]$$

$$\boxed{\lambda = \frac{Pl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}}$$

przyjmując, że $Q = A\cdot l\cdot\gamma$

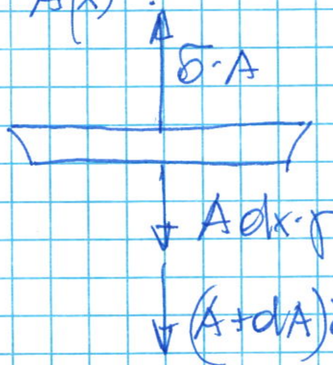
$$\boxed{\lambda = \frac{Pl}{EA} + \frac{Q\cdot l}{2EA}}$$

Pręt o równomiernej wytrzymałości $\sigma = const$



Dane: P, $A_{x=l} = A_l$, $\sigma = const$

$A(x)$ – ?



Równanie równowagi $(A+dA)\sigma + A\cdot\gamma\cdot dx - \sigma\cdot A = 0$

$$\sigma\, dA + A\cdot\gamma\, dx = 0$$

$$\frac{1}{A} dA = -\frac{\gamma}{\sigma} dx$$

$$\boxed{\ln A + C = -\frac{\gamma}{\sigma} x}$$

ale $A_{x=l} = A_l = \frac{P}{\sigma}$

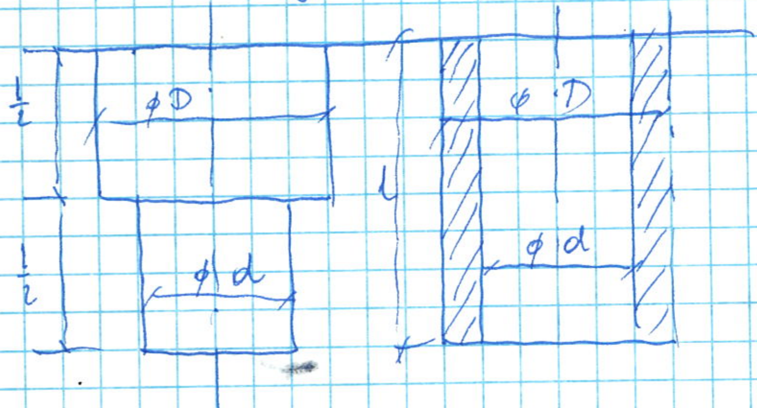
$\frac{P}{\sigma}$ z $\quad \ln A_l + C = -\frac{\gamma}{\sigma} l \Rightarrow C = -\ln A_l - \frac{\gamma}{\sigma} l$

$$\ln A - \ln A_l = \frac{\gamma}{\sigma} l - \frac{\gamma}{\sigma} x$$

$$\ln \frac{A}{A_l} = \frac{\gamma}{\sigma}(l - x)$$

$$\boxed{A = A_l \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma}(l-x)}}$$

Zad. 1 Obliczyć i porównać wartości jednostkowej sztywności rozciągania dwóch prętów przedstawionych na rysunku. Pręty wykonane z tego samego materiału o module Younga E. Stosunek średnic $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}8$. Dla jakiej wartości α jednostkowe sztywności rozciągania będą jednakowe?



Dane:
$E, \alpha, D, (P)$ $\quad \frac{d}{D} = \alpha$

$C = \frac{EA}{l} - ?$

Jednostkowa sztywność rozciągania $\quad C = \frac{P}{\Delta l} \quad \Delta l = \frac{P \cdot l}{EA}$

$$C = \frac{\frac{PEA}{P \cdot l}} = \frac{EA}{l} \qquad C = \frac{P}{\Delta l}$$

(A) Wydłużenie pręta o zmiennej średnicy wynosi

$$\Delta l_1 = \frac{P \cdot \frac{l}{2}}{E \frac{\pi d^2}{4}} + \frac{P \frac{l}{2}}{E \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4Pl}{2\pi E d^2} + \frac{4Pl}{2\pi E D^2} = \frac{2Pl}{\pi E}\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{D^2}\right)$$

$$\Delta l_1 = \frac{2Pl}{\pi E} \frac{D^2 + d^2}{d^2 D^2}$$

wówczas

$$C_1 = \frac{P}{\Delta l_1} = \frac{\pi E d^2 D^2}{2l(d^2 + D^2)} = \frac{\pi E (\alpha^2) D^4}{2l (1+\alpha^2) D^2} = \frac{\pi E \alpha^2 D^2}{2l(1+\alpha^2)}$$

(B) Wydłużenie elementu rurowego

$$\Delta l_2 = \frac{P \cdot l}{E \pi \frac{(D^2 - d^2)}{4}} = \frac{4Pl}{\pi E (D^2 - d^2)}$$

$$C_2 = \frac{P}{\Delta l_2} = \frac{\pi E (D^2 - \alpha^2 D^2)}{4l} = \frac{\pi E D^2 (1-\alpha^2)}{4l}$$

(C) Stosunek sztywności jednostkowych

$$k = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\cancel{\pi E} \alpha^2 \cancel{D^2}}{2\cancel{l}(1+\alpha^2)} \cdot \frac{4\cancel{l}}{\cancel{\pi E D^2}(1-\alpha^2)} = \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^4}$$

$$k = \frac{2 \cdot 0.8^2}{1 - 0.8^4} = \frac{2 \cdot 0.64}{1 - 0.41} = 2.17$$

(D) Kiedy sztywności jednostkowe będą jednakowe?

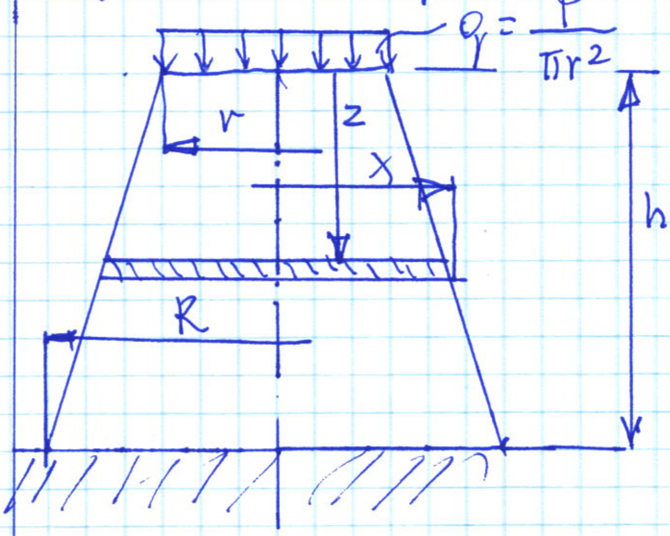
$$k = \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^4} = 1 \qquad \alpha^4 + 2\alpha^2 - 1 = 0 \qquad \alpha^2 = z$$

$$z^2 + 2z - 1 = 0 \qquad \Delta = 4 + 4 = 8 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$z_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1 = 0.41$$

$$\alpha = 0.643$$

Zad.. Stożek ścięty o wysokości h, promieniach podstaw R, r i ciężarze właściwym γ jest ściskany równomiernie rozłożonym obciążeniem o wypadkowej P.
Wyznaczyć promień x przekroju, w którym wystąpi najmniejsze naprężenie ściskające



Dane: h, R, r, γ, P

$x_{\sigma_{min}}$ - ?

(uwaga: rośnie ciężar i przekrój wraz ze wzrostem z)

(1) Należy znaleźć związki między zmiennymi z i x

$$\frac{z}{h} = \frac{x-r}{R-r} \Rightarrow$$

$$x = r + \frac{z(R-r)}{h}$$

Wówczas $dx = \frac{R-r}{h} dz$ ale potrzebne jest raczej dz

czyli $dz = \frac{h}{R-r} dx$

(2) Na pole przekroju o promieniu x równe πx^2 oddziała ciężar/siła $G(x)$

$$G(x) = \pi \cdot \gamma \int_0^z x^2 dz = \pi \cdot \gamma \int_r^x x^2 \frac{h}{R-r} dx = \frac{\pi \gamma h}{R-r} \frac{x^3}{3} \bigg|_r^x =$$

$$= \frac{\pi \gamma h}{3(R-r)} (x^3 - r^3) = a(x^3 - r^3) \text{, gdzie}$$

to jest stała czyli a

$$a = \frac{\pi \gamma \cdot h}{3(R-r)}$$

(3) Naprężenie w przekroju odległym o z (czyli dla promienia x) wynosi

$$\sigma(x) = \frac{P + G(x)}{\pi x^2} = \frac{P + a(x^3 - r^3)}{\pi x^2}$$

(4) Wyznaczmy ekstremum funkcji $\sigma(x)$

proponuję pokazać, że tak jest (pełne obliczenie)

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = \frac{1}{\pi}\left[a - 2\left(\frac{P - ar^3}{x^3}\right)\right] = 0$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

z tego $a = \frac{2}{x^3}\left(P - ar^3\right) \Rightarrow x^3 = \frac{2}{a}\left(P - ar^3\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2\left(\frac{P}{a} - r^3\right)} = \sqrt[3]{\frac{6P(R-r)}{\pi\rho h} - 2r^3}$$

ale x musi musi być dodatnie (ujemne nie ma sensu!) i mieścić się pomiędzy

$$r \le x \le R$$

x jest dodatnie, gdy $P > ar^3$

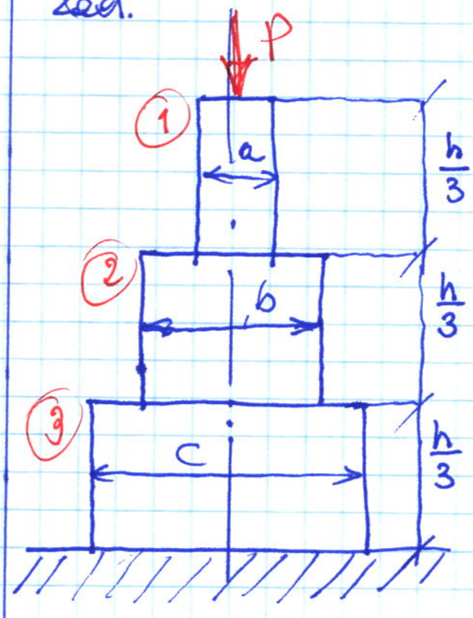
Jednocześnie aby nasze ekstremum, to było minimum, to druga pochodna musi być większa od zera, czyli $\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2} > 0$

$$\frac{d^2(\sigma x)}{dx^2} = \frac{6\left(P - ar^3\right)}{\pi x^4} \Leftarrow \text{wyprowadzić}$$

Rzeczywiście, gdy $P > ar^3$, to druga pochodna jest dodatnia.

Ostatecznie x jest promieniem, gdzie $\sigma(x)$ jest najmniejsze i $r \le x \le R$

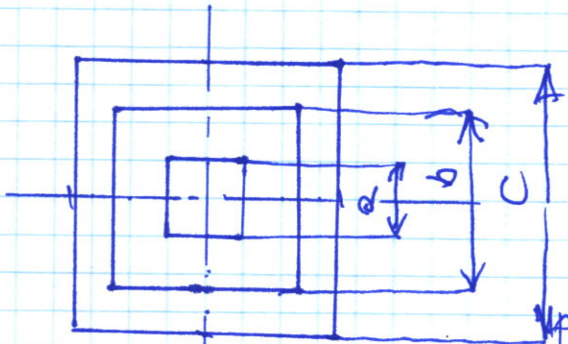
Zad.



Słup betonowy o trzech przekrojach kwadratowych i wysokości h jest ściskany siłą osiową P i własnym ciężarem (ciężar właściwy – γ)

Naprężenie dopuszczalne na ściskanie wynosi k_c.

Obliczyć boki kwadratów, odpowiednio: a, b, c



(A) Ciężar górnego słupa (1) wynosi

$$Q_1 = a^2 \cdot \frac{h}{3} \cdot \gamma$$

Słup ten wywiera nacisk na słup dolny ~~ciśnienie~~

$\cancel{\frac{Q_1}{a^2} - \frac{h}{3} \cdot \gamma}$ Musi być spełniony warunek

$$P + Q_1 \leq k_c \cdot a^2$$

$$P + Q_1 \leq k_c \cdot a^2$$ w skrajnym przypadku

$$P + a^2 \cdot \frac{h}{3} \cdot \gamma = k_c \cdot a^2$$

$$\frac{a^2 \cdot h \cdot \gamma}{3} - k_c \cdot a^2 + P = 0 \Rightarrow$$

$$a^2\left(k_c - \frac{h \cdot \gamma}{3}\right) = P \qquad a^2 \frac{(3k_c - h \cdot \gamma)}{3} = P$$

Z tego $$a = \sqrt{\frac{3P}{3k_c - h \cdot \gamma}}$$

(B) Ciężar środkowego słupa (2)

$$Q_2 = b^2 \cdot \frac{h}{3} \cdot \gamma$$

Aby wyznaczyć b trzeba uwzględnić teraz ciężar słupów (1) i (2) oraz siły P, czyli

Obciążenie pod słupem (2) wynosi

$P + Q_1 + Q_2$ a warunek wytrzymałości

ma postać

$$\frac{P + Q_1 + Q_2}{b^2} \leq k_c$$, w przypadku równości

mamy

$$p + a^2 \cdot \frac{h}{3} \cdot \gamma + b^2 \cdot \frac{h}{3} \cdot \gamma = k_c \cdot b^2$$

$$p + \frac{3p}{3k_c - h\gamma} \cdot \frac{h}{3} \cdot \gamma + b^2 \frac{h}{3} \cdot \gamma = k_c \cdot b^2$$

$$p + \frac{3p \cdot h \cdot \gamma}{(3k_c - h \cdot \gamma)} = b^2 \left(k_c - \frac{h \cdot \gamma}{3}\right) \Rightarrow b^2 \quad \text{itd}$$

W kolejnym kroku można wyznaczyć c pamiętając, że powierzchnia dolna obciążona jest wszystkimi trzema stopniami, czyli: $Q_1 + Q_2 + Q_3$