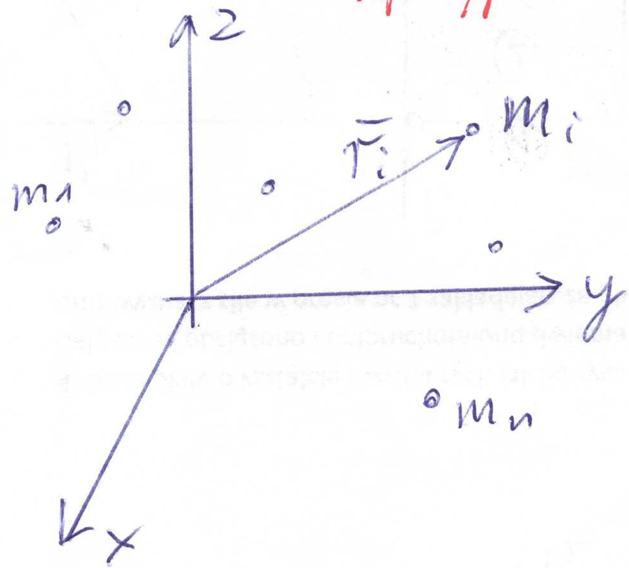
I WSTĘP

1. Dyskretny Układ Mechaniczny

(przypomnienie z poprzedniego wykładu)



① zbiór $(m_i, \bar{r}_i)$
$(i = 1, 2, \dots n)$

② więzy
$g_\alpha(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t) = 0$
$(\alpha = 1, 2, \dots k)$

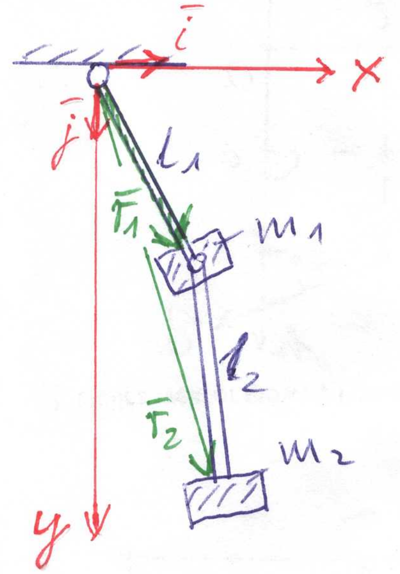
③ siły aktywne
$\bar{P}_i = \bar{P}_i(\bar{r}_\nu, \dot{\bar{r}}_\nu, t)$
$(\nu = 1, 2, \dots n)$

$k < 3n$

$N = 3n - k > 0$, $\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}$

↑ Liczba stopni swobody

Przykład:



ad ①: $(m_1, \bar{r}_1)$; $(m_2, \bar{r}_2)$

$\bar{r}_1 = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}$
$\bar{r}_2 = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}$ $n = 2$

ad ②: więzy:

$\alpha = 1: \quad z_1 = 0$

$\alpha = 2: \quad z_2 = 0$

$\alpha = 3: \quad x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$

$\alpha = 4: \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$

$k = 4$; $N = 3n - k = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

ad ③: siły aktywne: $\bar{P}_1 = m_1 g \bar{j}$, $\bar{P}_2 = m_2 g \bar{j}$

2. Więzy i ich klasyfikacja

$g_\alpha(\bar{r}_i, t) = 0$ (bez prędkości) – więzy geometryczne

$g_\alpha(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t) = 0$ (z prędkością) – więzy kinematyczne lub tzw. różniczkowe

$g_\alpha(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i) = 0$ (bez czasu) – więzy stacjonarne

$g_\alpha(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i, t) = 0$ (z czasem) – więzy niestacjonarne

np:

$g_\alpha(\bar{r}_i) = 0$ – równanie więzów stacjonarnych i geometrycznych

<u>Uwaga</u>: W podanym przykładzie podwójnego wahadła wszystkie więzy są stacjonarne i geometryczne.

3. Klasyfikacja układów

A. Układ nazywamy <u>holonomiczny</u> jeśli wszystkie jego więzy są geometryczne. Jeśli przynajmniej jedno równanie więzów jest typu kinematycznego to taki układ nazywamy <u>nieholonomiczny</u>

B. Układ nazywamy <u>reonomiczny</u> jeśli przynajmniej jedno równanie więzów jest typu niestacjonarnego. Jeśli wszystkie równania więzów są stacjonarne to układ jest <u>skleronomiczny</u>.

Uwaga: Równania więzów z przykładu podwójnego wahadła są spełnione w każdej chwili czasu t. Różniczkując je po czasie otrzymujemy odpowiednie związki dla prędkości np.:

$\underline{\alpha=3}$: $x_1^2+y_1^2-l_1^2=0 \;\Big|\; \frac{d}{dt}$

$$2x_1\dot{x}_1+2y_1\dot{y}_1=0$$

Chociaż występują tu składowe wektora prędkości $\dot{\vec{r}}_1$, to nie jest to równanie więzów kinematyczne!

Podany przykład podwójnego wahadła przedstawia więc układ holonomiczny i skleronomiczny (długości prętów l_1, l_2 nie zmieniają się w czasie). Dalej będziemy omawiać jedynie:

Dynamika Układów Holonomicznych

II Prędkości i przemieszczenia możliwe.

Weźmy dowolny układ holonomiczny:

n - dowolna liczba mas

k - dowolna liczba więzów (ale $k<3n$)

Równania więzów:

$$g_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n, t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\dots,k) \qquad (1$$

Ale każdy z wektorów wodzących $\bar{r}_\nu$ $(\nu=1,2,\dots,n)$ zależy od czasu. Różniczkując równanie (1) po czasie mamy:

$$\frac{dg_\alpha}{dt} = \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_1}\cdot\dot{\bar{r}}_1 + \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_2}\cdot\dot{\bar{r}}_2 + \dots + \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_n}\cdot\dot{\bar{r}}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$$

lub w formie skróconej:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu}\cdot\dot{\bar{r}}_\nu + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha=1,2,\dots k) \qquad (2)$$

W pewnej dowolnej chwili czasu (np. $t=t_1$) mamy więc pewien układ równań postaci (2). Niewiadomymi tego układu są wektory $\dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2, \dots \dot{\bar{r}}_n$. Są to prędkości poszczególnych punktów $m_1, m_2, \dots m_n$ naszego układu. Natomiast $\frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu}$, $\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$ – mogą zależeć tylko od $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots \bar{r}_n, t$.

Dla ustalonej chwili czasu t_1 wielkość $\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$ jest pewną liczbą. Natomiast wielkość $\partial g_\alpha / \partial \bar{r}_\nu$ jest wektorem postaci:

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} = \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_\nu}\cdot\bar{i} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\nu}\bar{j} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z_\nu}\cdot\bar{k} \qquad (3)$$

Wektor tej postaci nosi nazwę <u>gradientu</u>. Pochodne cząstkowe $\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_\nu}, \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_\nu}, \frac{\partial g_\alpha}{\partial z_\nu}$ są współrzędnymi tego wektora.

Składniki $\frac{\partial q_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} \cdot \dot{\bar{r}}_\nu$ występujące w równaniu (2) są więc równe

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} \cdot \dot{\bar{r}}_\nu = \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\nu} \cdot \bar{i} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\nu} \cdot \bar{j} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial z_\nu} \cdot \bar{k}\right) \cdot \left(\dot{x}_\nu \bar{i} + \dot{y}_\nu \bar{j} + \dot{z}_\nu \bar{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\nu} \cdot \dot{x}_\nu + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\nu} \cdot \dot{y}_\nu + \frac{\partial q_\alpha}{\partial z_\nu} \cdot \dot{z}_\nu \qquad (4)$$

gdzie wielkości $\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\nu}, \frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\nu}, \frac{\partial q_\alpha}{\partial z_\nu}$ są, dla ustalonej chwili np. t_1, również pewnymi liczbami.

Po uwzględnieniu wyniku (4) równania (2) przyjmują postać:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\nu} \cdot \dot{x}_\nu + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\nu} \cdot \dot{y}_\nu + \frac{\partial q_\alpha}{\partial z_\nu} \cdot \dot{z}_\nu\right) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (5)$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots k)$$

Wyrażenie (5) jest pewnym układem równań algebraicznych o niewiadomych $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$. Niewiadome te są współrzędnymi wektora prędkości $\dot{\bar{r}}_\nu$. Postawmy zadanie następujące:

Mając k równań postaci (5) należy wyznaczyć niewiadome $\dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$ dla $\nu = 1, 2, \ldots, n$

Czy to się da zrobić ?!

Niewiadomych jest $3n$ zaś równań postaci (5) tylko k. Ale $k < 3n$. Więc się nie da uzyskać jednoznacznego rozwiązania. Jeśli $k < 3n$ to mamy nieskończenie wiele rozwiązań!

Możemy jednak wprowadzić pojęcie takich prędkości $\dot{\bar{r}}_\nu = \dot{x}_\nu \bar{i} + \dot{y}_\nu \bar{j} + \dot{z}_\nu \bar{k}$ dla których równania (5) są spełnione. Prędkości takie będziemy nazywać prędkościami możliwymi. Innymi słowy:

> Układ prędkości możliwych $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n$ jest to taki układ prędkości dla których k równań postaci (2) (lub postaci (5)) jest spełniony.

Z uwagi na to, że $k < 3n$ układów prędkości możliwych jest nieskończenie wiele.

Jeśli $\bar{v}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ jest pewnym układem $[\bar{v}]$ prędkości możliwych, czyli:

$$\underbrace{[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{r}}_1 \\ \dot{\bar{r}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{r}}_n \end{bmatrix}}_{\text{układ prędkości możliwych}} \quad \Big| \cdot dt \implies \underbrace{[d\bar{r}] = \begin{bmatrix} d\bar{r}_1 \\ d\bar{r}_2 \\ \vdots \\ d\bar{r}_n \end{bmatrix}}_{\text{układ przemieszczeń możliwych}}$$

to poprzez wymnożenie go przez elementarny przyrost czasu dt uzyskuje się <u>układ przemieszczeń możliwych</u>. Równania jakie muszą spełniać przemieszczenia możliwe uzyskamy poprzez wymnożenie równań (2) przez dt, to jest:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar r_\nu}\cdot \dot{\bar r}_\nu + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0} \xrightarrow{\cdot dt} \boxed{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar r_\nu}\cdot d\bar r_\nu + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}\, dt = 0} \quad (6)$$

Równania $(\alpha=1,2,\ldots,k)$ na prędkości możliwe

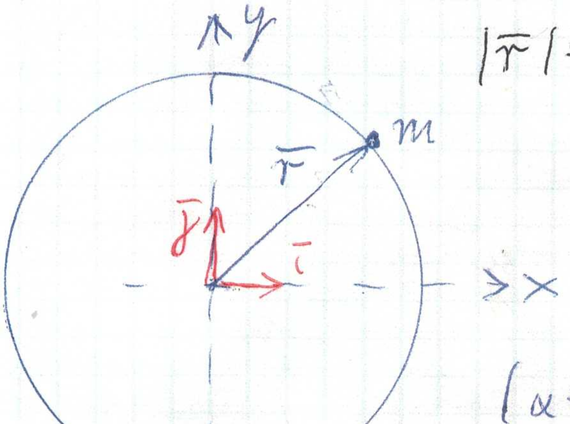
Równania $(\alpha=1,2,\ldots k)$ na przemieszczenia możliwe

Można więc przyjąć definicję na przemieszczenia możliwe następującą:

Przemieszczenia możliwe (zwane także przygotowane) to takie elementarne przemieszczenia $d\bar r_1, d\bar r_2, \ldots d\bar r_n$, które spełniają układ równań (6)

Układów przemieszczeń możliwych (podobnie jak układów prędkości możliwych) jest nieskończenie wiele bowiem $k<3n$.

<u>Przykład</u>: Wyznaczyć równania na prędkości możliwe ruchu punktu poruszającego się po okręgu o stałym promieniu ϱ



$|\bar r| = \varrho$

$\underline{n=1}$:

$N = 3n - k$

$n=$

$k=$

$\bar r = x\bar i + y\bar j + z\bar k$

$N=1$

równania więzów: $\boxed{g_\alpha(\bar r_\nu)=0}$

$(\alpha=1)$ $z=0$

$(\alpha=2)$ $x^2+y^2=\varrho^2 \longrightarrow x^2+y^2-\varrho^2=0$

$g_1 = z \,,\; g_2 = x^2+y^2-\varrho^2$

$$\boxed{\frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial g_\alpha}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z}\bar{k} = \overline{grad}(g_\alpha)}$$

$\alpha = 1$:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \bar{r}} = \underbrace{\frac{\partial g_1}{\partial x}}_{0}\bar{i} + \underbrace{\frac{\partial g_1}{\partial y}}_{0}\bar{j} + \underbrace{\frac{\partial g_1}{\partial z}}_{1}\bar{k} = \bar{k}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial t} = 0$$

$\alpha = 2$:

$$\frac{\partial g_2}{\partial \bar{r}} = \underbrace{\frac{\partial g_2}{\partial x}}_{2x}\bar{i} + \underbrace{\frac{\partial g_2}{\partial y}}_{2y}\bar{j} + \underbrace{\frac{\partial g_2}{\partial z}}_{0}\bar{k} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial t} = 0$$

Równania na prędkości możliwe:

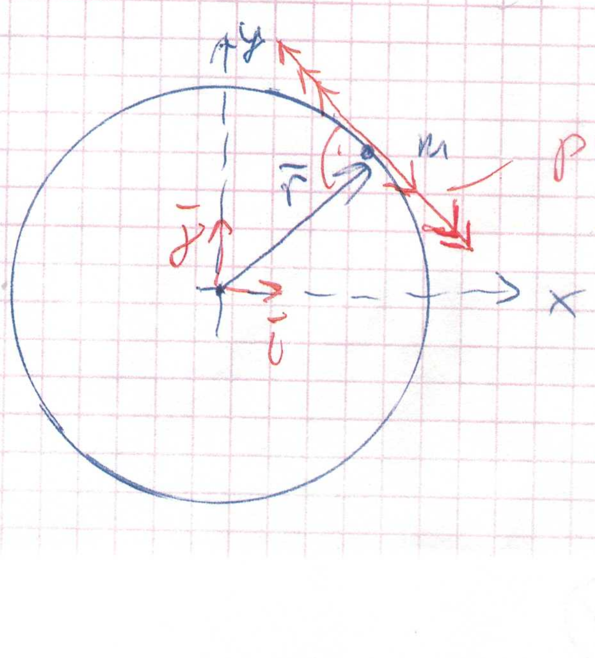
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_i} \cdot \dot{\bar{r}}_i + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k)$$

u nas $k = 2$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = 0 \rightarrow \bar{k} \cdot \dot{\bar{r}} = 0 \rightarrow \boxed{\bar{k} \cdot \bar{v} = 0} \Rightarrow \bar{v} \perp \bar{k}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = 0 \rightarrow (2x\bar{i} + 2y\bar{j}) \cdot \dot{\bar{r}} = 0 \rightarrow \underbrace{(x\bar{i} + y\bar{j})}_{} \cdot \bar{v} = 0$$

$$\bar{v} \perp \bar{r} \Leftarrow \boxed{\bar{r} \cdot \bar{v} = 0}$$



prędkości możliwe

Można ich narysować nieskończenie wiele

III. Przemieszczenia wirtualne

Układów przemieszczeń możliwych jest nieskończenie wiele. Weźmy więc dwa dowolne $d\bar{r}_\nu'$, $d\bar{r}_\nu''$, to jest:

$$[d\bar{r}]' = \begin{bmatrix} d\bar{r}_1' \\ d\bar{r}_2' \\ \vdots \\ d\bar{r}_n' \end{bmatrix} \qquad i \qquad [d\bar{r}]'' = \begin{bmatrix} d\bar{r}_1'' \\ d\bar{r}_2'' \\ \vdots \\ d\bar{r}_n'' \end{bmatrix}$$

Jeśli obydwa układy są możliwe to muszą obydwa spełniać równania (6) to jest:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} d\bar{r}_\nu' + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \cdot dt = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots k) \quad (7)$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} d\bar{r}_\nu'' + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \cdot dt = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots k) \quad (8)$$

przy czym dla ustalonej chwili czasu t_1 wszystkie współczynniki w układzie równań (7) są równe odpowiednim współczynnikom w układzie równań (8). Odejmując stronami od siebie równania (8) od równań (7) otrzymujemy:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} d\bar{r}_\nu' + \cancel{\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \cdot dt} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} d\bar{r}_\nu'' - \cancel{\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \cdot dt} = 0$$

a stąd

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} \underbrace{(d\bar{r}_\nu' - d\bar{r}_\nu'')}_{\text{tzw. przemieszczenie wirtualne !}} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots k)$$

Stąd różnicę dwu dowolnych przemieszczeń możliwych $d\bar{r}_\nu'$ i $d\bar{r}_\nu''$ nazywamy przemieszczeniami wirtualnymi:

$$\delta \bar{r}_\nu = d\bar{r}_\nu' - d\bar{r}_\nu'' \qquad (\nu = 1, 2, \dots n) \tag{9}$$

Przemieszczenia wirtualne $\delta \bar{r}_\nu$ spełniają układ równań postaci:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \bar{r}_\nu} \cdot \delta \bar{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots k) \tag{10}$$

Przemieszczenia wirtualne są to więc takie elementarne przemieszczenia, które spełniają k równań postaci (10).

Przemieszczenia $\delta \bar{r}_\nu \not\equiv d\bar{r}_\nu$ bo równania (10) różnią się od równań (6). Różnica znika dla więzów $g_\alpha(\bar{r}_\nu, t) = g_\alpha(\bar{r}_\nu) = 0 \longrightarrow \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$

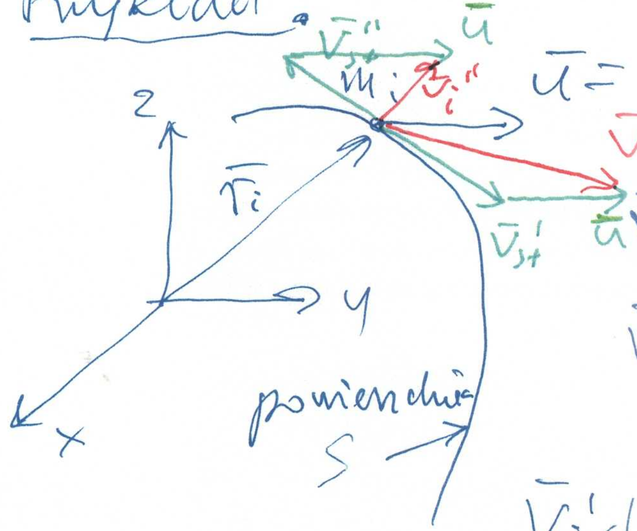
<u>WNIOSEK:</u>

Dla układów skleronomicznych

$$\delta \bar{r}_\nu \equiv d\bar{r}_\nu \quad !!$$

Ażeby to zilustrować weźmy przykład punktu, który może poruszać się po powierzchni S poruszającej się z pewną stałą prędkością $\bar{u} = const$

Przykład:



$\bar{u} = \text{const}$ (prędkość powierzchni S)

$$\bar{V}_i' = \bar{V}_{st}' + \bar{u} \quad \Big| \cdot dt$$

$$\bar{V}_i'' = \bar{V}_{st}'' + \bar{u} \quad \Big| \cdot dt$$

$$\bar{V}_i' dt = d\bar{r}_i' = \bar{V}_{st}' dt + \bar{u}\, dt$$

$$\bar{V}_i'' dt = d\bar{r}_i'' = \bar{V}_{st}'' dt + \bar{u}\, dt$$

$$\delta \bar{r}_i = d\bar{r}_i' - d\bar{r}_i'' = \bar{V}_{st}' dt + \cancel{\bar{u}\, dt} - \bar{V}_{st}'' dt - \cancel{\bar{u}\, dt} =$$

$$= (\bar{V}_{st}' - V_{st}'')\, dt$$ – wektor styczny do S!

$d\bar{r}_i'$, $d\bar{r}_i''$ – nie są styczne!

$\Downarrow$

WNIOSEK:

<u>Przemieszczenia wirtualne $\delta \bar{r}_i$ są to przemieszczenia możliwe przy tzw. więzach „zamrożonych"</u>