

Aksjomaty Statyki

-1-

Wykonywana do tej pory na poprzednich wykładach teoria statyki opiera się na pewnych istotnych podstawach zwanych aksjomatami. Aksjomaty statyki są to pewne założenia, które są potwierdzone w sposób doświadczalny (przyjmuje się je jako prawdziwe bez dowodu). Zanim je kolejno wymienimy podsumujmy w kilku punktach najistotniejsze wprowadzone do tej pory pojęcia:

1. Jeśli dwa różne układy sił $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ i $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m)$ wywołują jednakowe skutki to układy te nazywamy układami równoważnymi. Zapisujemy to: $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n) \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m)$.
2. Jeśli układem równoważnym układowi $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ jest jedna siła to siła ta nazywamy wypadkową.
3. Redukcja układu złożonego $\bar{P}_i (i=1, 2, \dots, n)$ nazywamy zastąpienie tego układu pewien układ równoważny składający się z mniejszej liczby sił to jest pewien układ $\bar{P}_i' (i=1, 2, \dots, m)$ gdzie $m < n$. W maksymalnym możliwym stopniu układ $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ można zredukować do wektora głównego $\bar{S}$ i momentu głównego $\bar{M}^0$ przybranych do dowolnego punktu O to jest:
$$(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n) \sim (\bar{S}, \bar{M}^0) \quad (1)$$

4. Jeżeli $\vec{S} = \vec{0}$; $\vec{M}^o = \vec{0}$ to układ taki nazywamy układem równowagowym zeru;

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n) \sim (\vec{0}, \vec{0}) \quad (2)$$

Aksjomaty Statyki:

1. Aksjomat bezwładności (zasada Galileusza).

Jeżeli na punkt materialny lub ciało sztywne działa układ sił równowagowy zeru to punkt ten (lub ciało sztywne) znajduje się w równowadze (spoczynku) jeżeli był on w równowadze (spoczynku) przed przyłączeniem tego układu sił.

2. Aksjomat równowagi dwóch sił.

Jeżeli ciało znajduje się w równowadze pod wpływem działania na niego dwóch sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ to siły te mają wspólną linię działania, jednakowe wartości (moduły) lecz przeciwnie zwroty:



to jest: $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$

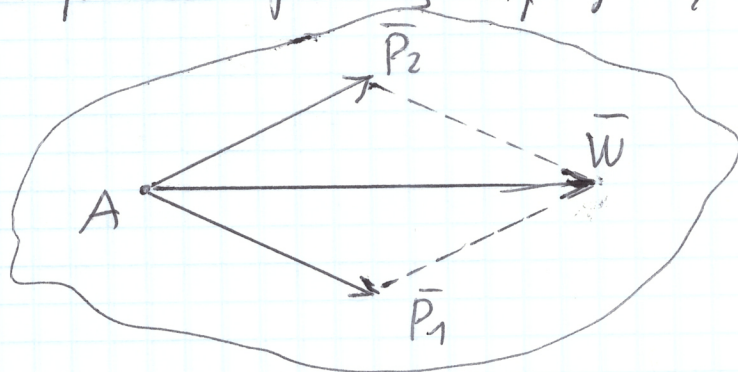
3. Aksjomat dodania (lub odjęcia) układu sił równowagowego zeru.

Dodanie do układu sił $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$ pewnego układu $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m) \sim (\vec{0}, \vec{0})$ nie zmienia

stanu (kinematycznego zachowania się) ciała sztywnego. To samo dotyczy odpręża,

4. Aksjomat składania dwóch sił przecinających się.

Dwie siły $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ przecinające się można zastąpić jedną siłą $\vec{W}$ (tzw. siłą wypadkową) przechodzącą przez ich punkt przecięcia przy czym $\vec{W} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$.



5. Aksjomat działania i przeciwdziałania

Jeżeli ciało A działa na ciało B pewną siłą $\vec{F}_{AB}$ to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$, które jest równa co do modułu modułowi siły $\vec{F}_{AB}$ obydwie siły mają wspólną linię działania lub przeciwnie zwroty, to jest

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \quad (3)$$

(Pamiętać, że wamich ten był wykorzystany w kratownicach)

6. Aksjomat zerowania.

Aksjomat ten dotyczy zmiany ciała sztywnego na ciało o kształcie kulce lub odwrócić:

Zmiany ciała odciekającego na ciało sztywne (np. gąbka nasączona wodą w temperaturze poniżej zera staje się ciałem sztywnym).

Aksjomat ten brzmi:

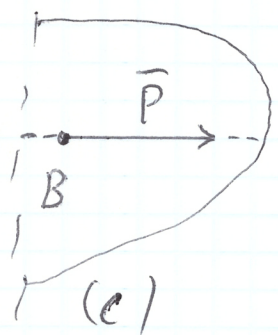
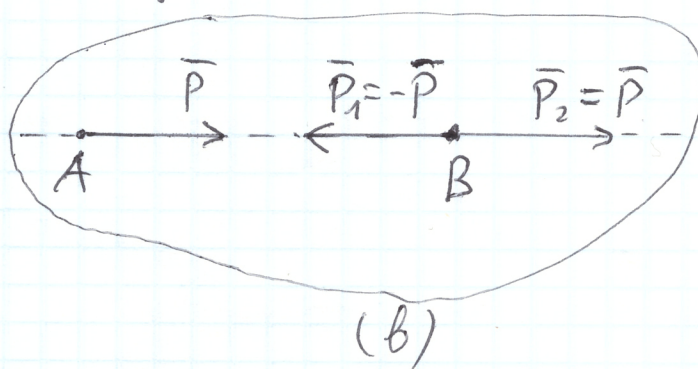
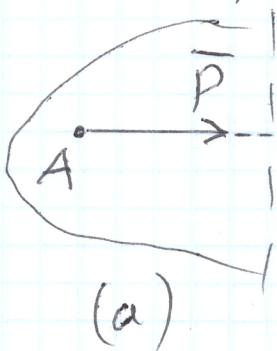
Jeżeli ciało odciekające znajduje się w równowadze pod działaniem pewnego układu sił, to po zesztynieniu będzie w tej pozycji w równowadze.

Natomiast jeżeli ciało sztywne znajduje się w równowadze to gdy stanie się ono odciekającym to nie musi być już w równowadze.

Przykład wykorzystania Aksjomatu 3:

Niech na pewne ciało działa jedna siła $\vec{P}$ przyłożona w punkcie A tego ciała (rysunek a).

Przyłożymy w punkcie B tego ciała układ dwóch sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ równoważący zero taki aby $\vec{P}_1 = -\vec{P}, \vec{P}_2 = \vec{P}$ (rysunek b)



Ale siły $\vec{P}$ i $\vec{P}_1$ mają wspólny linia działania, jednakowe wartości i przeciwne zwroty więc na podstawie Aksjomatu 2 ulegają redukcji (znoszą się, ich suma jest równa zero). Pozostaje wtedy tylko jedna siła $\vec{P}_2 = \vec{P}$ (rysunek c).

Zauważamy więc, że siłę $\vec{P}$ możemy przenieść do punktu B z punktu A byłoby otych punktów A i B leżały na prostej działającej siły P. Wykazać możemy więc (ważny), że siły są wektorami „ślizgającymi się”.

Warunki Równowagi w Przestrzeni

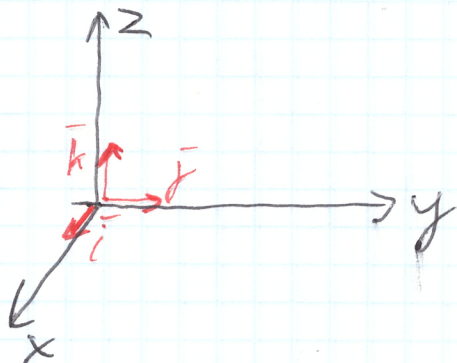
W przestrzeni trójwymiarowej x, y, z stojącej występują warunki równowagi czyli:

$$I \quad \vec{S} = \vec{0}$$

↑
wektor główny

$$II \quad \vec{M}_0 = \vec{0}$$

↑
moment główny
(0 - dowolnie wybrany punkt przestrzeni)



$$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$$

$$\vec{M}_0 = M_{0x} \vec{i} + M_{0y} \vec{j} + M_{0z} \vec{k}$$

W układach zbieżnym (kratownice przestrzenne) wystarczy stosować jedynie warunek I:

$$\vec{S} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$

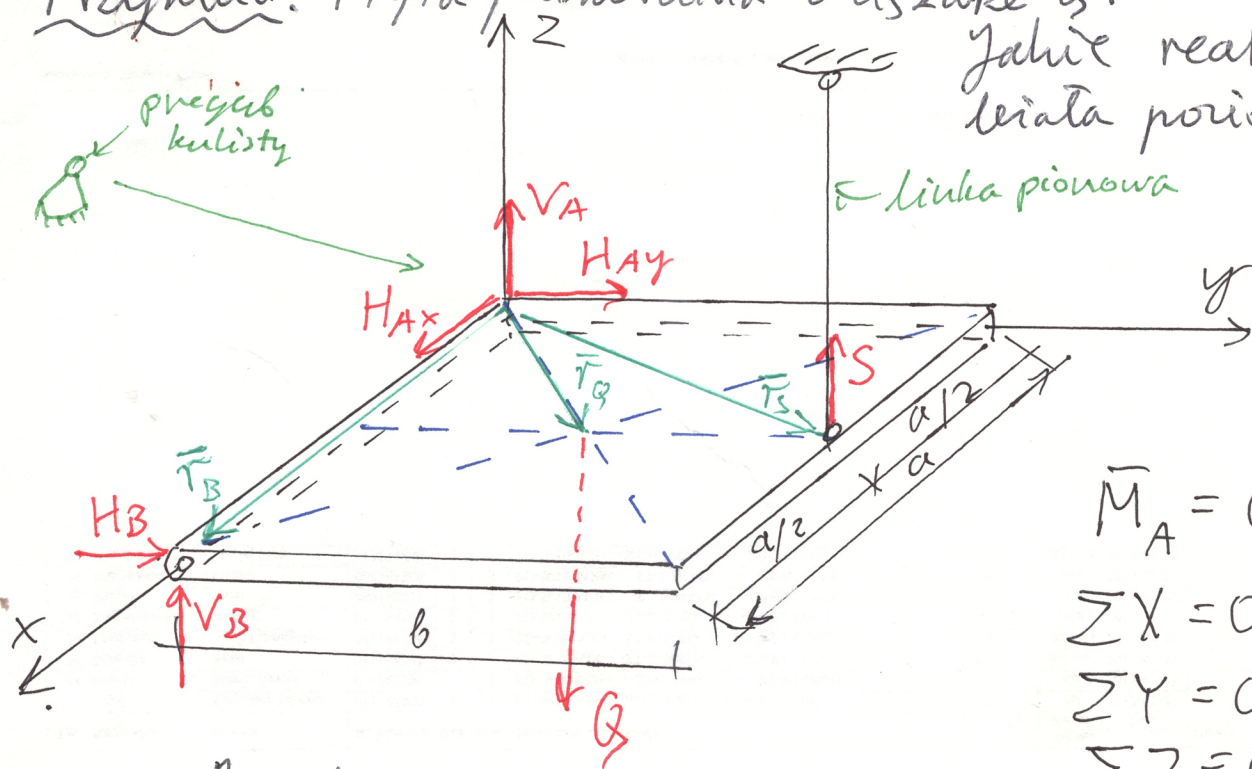
(te trzy warunki skalarne dla każdego węzła kratownicy)

W układach niesbieżnym konieczny jest również warunek II.

Przykład: Płyta jednorodna o ciężarze Q .

-6- (1)

Jakie reakcje aby
biała porówno?



Rys. 1.

$$\bar{M}_A = \bar{0}$$

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum Z = 0$$

$$\bar{M}_A = \bar{r}_S \times \bar{S} + \bar{r}_Q \times \bar{Q} + \bar{r}_B \times \bar{R}_B$$

$$\bar{R}_A = H_{Ax} \bar{i} + H_{Ay} \bar{j} + V_A \bar{k}$$

$$\bar{R}_B = H_B \bar{j} + V_B \bar{k}$$

$$\bar{r}_S \times \bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{a}{2} & b & 0 \\ 0 & 0 & S \end{vmatrix} = \bar{i}(\underline{b \cdot S}) - \bar{j}(\underline{\frac{a}{2} \cdot S}) + \bar{k} \cdot 0$$

$$\bar{r}_Q \times \bar{Q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -Q \end{vmatrix} = \bar{i}(\underline{\frac{b}{2} \cdot (-Q)}) - \bar{j}(\underline{\frac{a}{2} \cdot (-Q)}) + \bar{k} \cdot 0$$

$$\bar{r}_B \times \bar{R}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & H_B & V_B \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot 0 - \bar{j}(\underline{a \cdot V_B}) + \bar{k}(\underline{a \cdot H_B})$$

$$\bar{i}: b \cdot S - Q \cdot \frac{b}{2} = 0 \rightarrow S = \frac{Q}{2}$$

$$\bar{j}: -\frac{a}{2} \cdot S + \frac{a}{2} \cdot Q - a V_B = 0 \rightarrow -\frac{a}{2} \cdot \frac{Q}{2} + \frac{a}{2} \cdot Q - a V_B = 0$$

$$V_B = Q/4$$

$$\bar{k}: a \cdot H_B = 0 \rightarrow H_B = 0$$

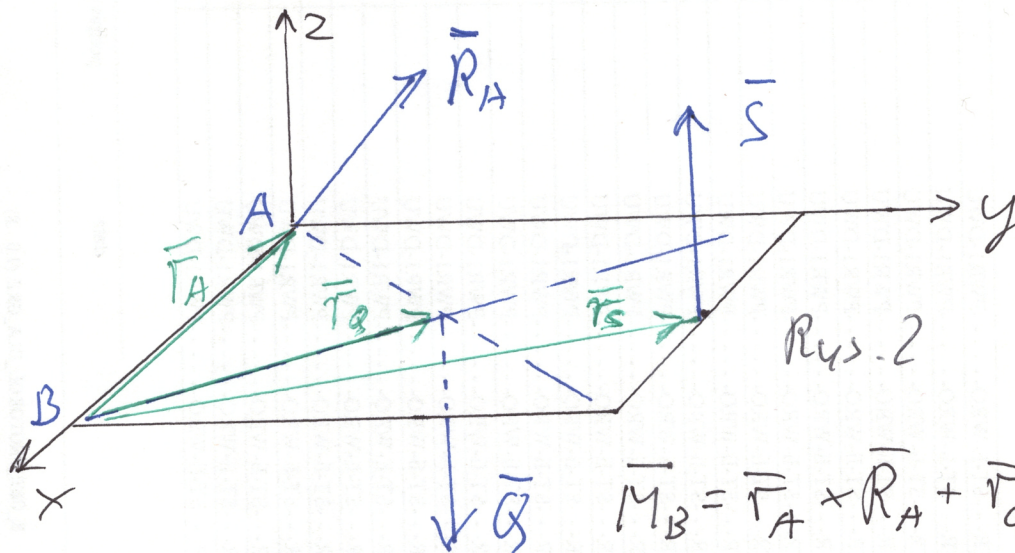
$$\Sigma X: H_{Ax} = 0$$

$$\Sigma Y: H_B + H_{Ay} = 0 \rightarrow H_{Ay} = 0$$

$$\Sigma Z: V_B + V_A - Q + S = 0$$

$$\frac{Q}{4} + V_A - Q + \frac{Q}{2} = 0 \rightarrow V_A = \frac{Q}{4}$$

$$\text{Spr: } \Sigma \bar{M}_B = 0$$



$$\bar{M}_B = \bar{r}_A \times \bar{R}_A + \bar{r}_Q \times \bar{Q} + \bar{r}_S \times \bar{S}$$

$$\bar{r}_A \times \bar{R}_A = \begin{vmatrix} \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \\ -a, 0, 0 \\ H_{Ax}, H_{Ay}, V_A \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot 0 - \bar{j}(-aV_A) + \bar{k}(-a \cdot H_{Ay})$$

$$\bar{r}_Q \times \bar{Q} = \begin{vmatrix} \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \\ -\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \\ 0, 0, -Q \end{vmatrix} = -\bar{j}\left(-\frac{a}{2} \cdot (-Q)\right) + \bar{i} \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot (-Q)\right)$$

$$\bar{r}_S \times \bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \\ -\frac{a}{2}, b, 0 \\ 0, 0, S \end{vmatrix} = \bar{i} S \cdot b - \bar{j}\left((- \frac{a}{2}) \cdot S\right)$$

$$\bar{i}: \frac{b}{2}(-Q) + Sb = -\frac{b}{2}Q + \frac{Q}{2} \cdot b = 0$$

$$\bar{J}: aV_A - \frac{a}{2} \cdot Q + \frac{a}{2} \cdot J = a \cdot \frac{Q}{4} - \frac{a}{2} \cdot Q + \frac{a}{2} \cdot \frac{Q}{2} = 0$$

$$\bar{K}: -a \cdot H_{Ay} = -a \cdot 0 = 0$$

OK!