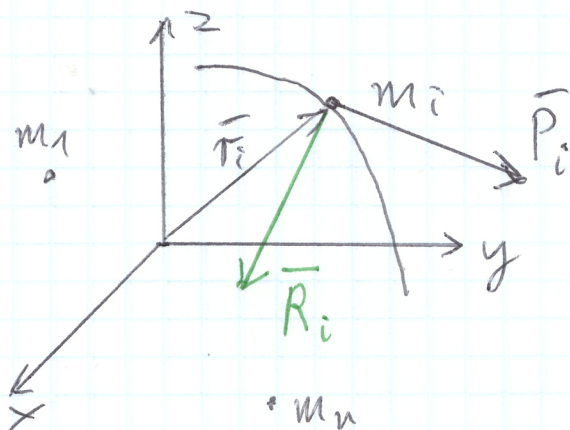


Ogólne Równanie Dynamiki

1. Wiązy idealne



$$[m_i, \bar{r}_i] \quad i=1, 2, \dots, n$$

Wprowadzamy siłę reakcji wiązy $\bar{R}_i$.

Całkowita siła $\bar{F}_i$ działająca na dowolny punkt m_i to

$$\bar{F}_i = \bar{P}_i + \bar{R}_i \quad (1)$$

↑
wypadkowa
wszystkich sił
aktywnych

↑
wypadkowa wszystkich
sił reakcji wiązy

Wtedy dla każdej dowolnej masy m_i możemy napisać II zasadę dynamiki Newtona:

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i \Rightarrow m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{P}_i + \bar{R}_i \quad (2)$$

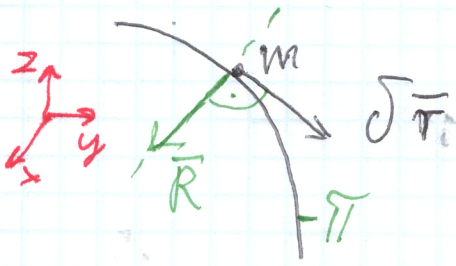
($\ddot{\bar{r}}_i$ - przyspieszenie i -ej masy m_i)

Def. wiązy idealnych:

Układ dynamiczny jest skosowany wiązaniami idealnymi jeśli suma prac sił reakcji $\bar{R}_i$ wykonana na przemieszczeniach wirtualnych $\delta \bar{r}_i$ jest równa zero, to jest jeśli:

$$\sum_{i=1}^n \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0. \quad (3)$$

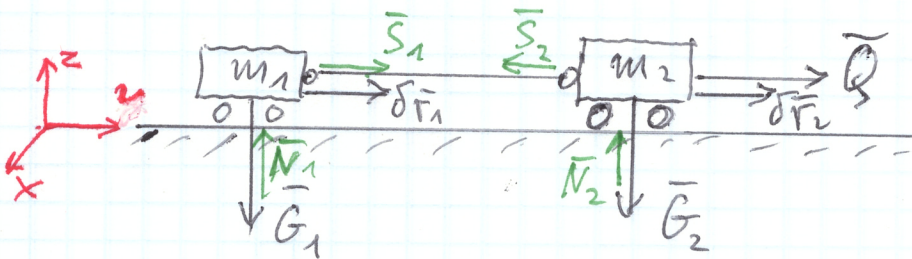
Przykład 1: Pojedynczy punkt może poruszać się po
Dla $n=1$ mamy: powierzchni Π



$$\sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \bar{R} \cdot \delta \bar{r} \rightarrow \bar{R} \perp \delta \bar{r}$$

Tak jest gdy powierzchnia Π
jest idealnie gładka (brak tarcia)

Przykład 2: Dwa punkty m_1, m_2 poruszające
się po tnie poziomym, prostoliniowym
bez tarcia i połączone ze sobą prętem
niezmienną o pewnej stałej długości l



$n=2$

$\bar{G}_1, \bar{G}_2$ - siły pionowe
ciężkości przyłożone
odpowiednio do
mas m_1, m_2 :

$$(G_1 = m_1 g, G_2 = m_2 g)$$

$$\bar{G}_1 = -G_1 \bar{k}, \bar{G}_2 = -G_2 \bar{k}$$

$\bar{Q}$ - siła pozioma przyłożona
do masy m_2

$\bar{N}_1, \bar{N}_2$ - siły reakcji tnie

(jeśli brak tarcia o tor to siły te muszą
mieć kierunek pionowy) $\Rightarrow \bar{N}_1 = N_1 \bar{k}, \bar{N}_2 = N_2 \bar{k}$

$\bar{S}_1, \bar{S}_2$ - siły reakcji pręta. Ponieważ akcja
równa jest reakcji (patrz zasady Newtona) więc:

$$\bar{S}_1 = -\bar{S}_2 \rightarrow \bar{S}_1 = S \bar{j}, \bar{S}_2 = -S \bar{j}$$

Siła aktywna działająca na masę m_1
jest równa: $\bar{P}_1 = \bar{G}_1 = -m_1 g \bar{k}$

Siła aktywna działająca na masę m_2 jest równa:

$$\bar{P}_2 = \bar{Q} + \bar{G}_2 = Q\bar{j} + m_2 g \bar{k}$$

Siła reakcji wiszów działająca na masę m_1 jest równa:

$$\bar{R}_1 = \bar{N}_1 + \bar{S}_1 = N_1 \bar{k} + S\bar{j}$$

Siła reakcji wiszów działająca na masę m_2 jest równa:

$$\bar{R}_2 = \bar{N}_2 + \bar{S}_2 = N_2 \bar{k} - S\bar{j}$$

Przemieszczenia wirtualne $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2$ są równe:

$$\delta\bar{r}_1 = \delta r_1 \bar{j}, \quad \delta\bar{r}_2 = \delta r_2 \bar{j}$$

pony tym $\delta r_1 = \delta r_2$ (bo pręt ma stałą długość l)

czyli: $\delta\bar{r}_1 = \delta r \bar{j}, \quad \delta\bar{r}_2 = \delta r \bar{j}$

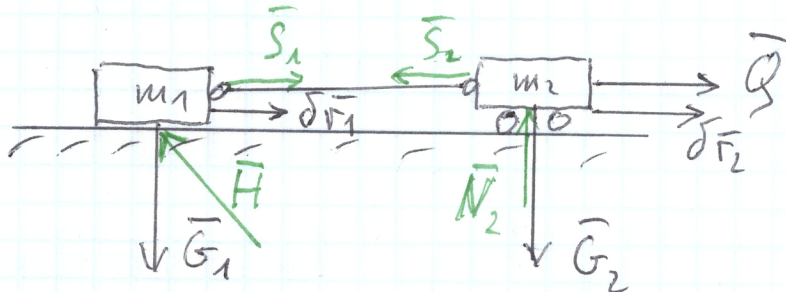
Czy jest spełniony warunek (3) w tym przykładzie?

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot \delta\bar{r}_i &= \bar{R}_1 \cdot \delta\bar{r}_1 + \bar{R}_2 \cdot \delta\bar{r}_2 = \\ &= (N_1 \bar{k} + S\bar{j}) \cdot \delta r \bar{j} + (N_2 \bar{k} - S\bar{j}) \cdot \delta r \bar{j} = \\ &= N_1 \underbrace{\delta r \bar{k} \cdot \bar{j}}_{=0} + S \underbrace{\delta r \bar{j} \cdot \bar{j}}_{=1} + N_2 \underbrace{\delta r \bar{k} \cdot \bar{j}}_{=0} - S \underbrace{\delta r \bar{j} \cdot \bar{j}}_{=1} = \\ &= S\delta r - S\delta r = 0 \rightarrow \text{jest spełniona!!} \end{aligned}$$

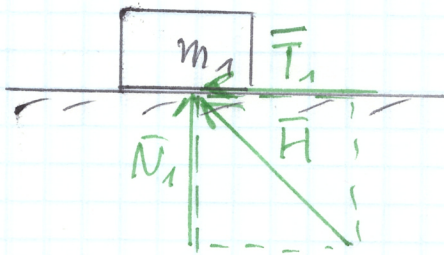
4-

A więc w tym przykładzie są idealne!

Przykład 3: Ten sam układ ale teraz mamy m_1 o tor.



W porównaniu do poprzedniego przykładu zmieniła się jedynie siła reakcji! Tu działałaby na masę m_1 . Mamy teraz:



$$\vec{H} = \vec{N}_1 + \vec{T}_1$$

gdzie $\vec{T}_1 = -T_1 \vec{j}$

$$T_1 = m_1 g \cdot \mu$$

μ - współczynnik tarcia

Czyli:

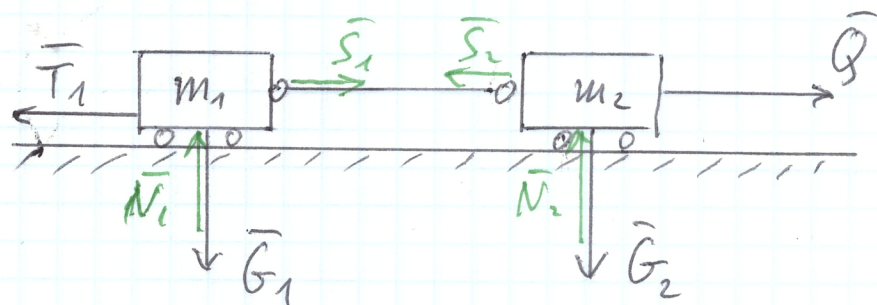
$$\vec{H} = N_1 \vec{k} - T_1 \vec{j}$$

Wyrażenie $\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ będzie teraz równe:

$$\begin{aligned} (N_1 \vec{k} + S \vec{j} - T_1 \vec{j}) \cdot \delta r \vec{j} + (N_2 \vec{k} - S \vec{j}) \cdot \delta r \vec{j} = \\ = -T_1 \delta r \neq 0 \end{aligned}$$

A więc w tym przypadku warunek (3) nie jest spełniony. Warunek ten więc

być jednak spełniony jeśli przyjmie się, że siła T_1 nie jest siłą reakcji więzów, lecz jest pewną dodatkową siłą, aktywną. Przyjmujemy więc:



$$\bar{P}_1 = \bar{G}_1 + \bar{T}_1 = -m_1 g \bar{k} - T_1 \bar{j} \quad - \text{siła aktywna}$$

$$\bar{P}_2 = \bar{Q} + \bar{G}_2 = Q \bar{j} - m_2 g \bar{k} \quad - \text{siła aktywna}$$

$$\bar{R}_1 = \bar{N}_1 + \bar{S}_1 = N_1 \bar{k} + S \bar{j} \quad - \text{siła reakcji}$$

$$\bar{R}_2 = \bar{N}_2 + \bar{S}_2 = N_2 \bar{k} - S \bar{j} \quad - \text{siła reakcji}$$

Zauważmy, że wtedy warunek (3) jest spełniony, bo siły reakcji $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ są identyczne jak w przykładzie 2.

WNIOSEK. W mechanice analitycznej przyjmuje się, że wszystkie siły są idealne, zaś siły tarcia tłuściości należą jako dodatkowe siły aktywne.

2. Ogólne Równanie Dynamiki

Dla każdego punktu materialnego $m_1, m_2, \dots, m_n$ spełniona jest II zasada dynamiki Newtona:

Mamy więc układ równań:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1 = \vec{P}_1 + \vec{R}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_2 = \vec{P}_2 + \vec{R}_2 \\ m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i = \vec{P}_i + \vec{R}_i \\ m_n \ddot{\vec{r}}_n &= \vec{F}_n = \vec{P}_n + \vec{R}_n \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{P}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

Wynosząc każde równanie powyższego układu równań przez odpowiednie przesunięcie wirtualne $\delta \vec{r}_i$ otrzymujemy:

$$(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{P}_i) \delta \vec{r}_i = \vec{R}_i \delta \vec{r}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

Sumując stronami powyższy układ równań otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^n (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{P}_i) \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \delta \vec{r}_i \quad (6)$$

Jeśli układ skrzepowany jest niezmiennie idealnym to prawa strona równania (6) (na mocy definicji (3)) musi być równa zero. Stąd otrzymujemy równanie

$$\sum_{i=1}^n (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{P}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad | \cdot (-1) \quad (7)$$

lub w postaci:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) \delta \bar{r}_i = 0} \quad (8)$$

Równanie (8) jest tzw. ogólnym równaniem dynamiki. Zauważając, że składnik

$$-m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{B}_i \quad (9)$$

przedstawia tzw. siłę bezwładności działającą na i -tą masę m_i układu możemy to równanie zapisać również w postaci:

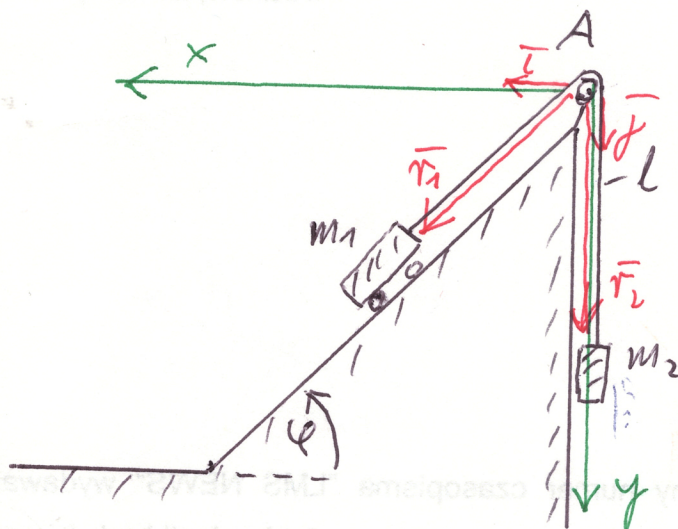
$$\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i + \bar{B}_i) \delta \bar{r}_i = 0 \quad (10)$$

Równanie (10) przedstawia tzw. zasadę d'Alemberta. Mówi ona, że:

Ruch układu dynamicznego odbywa się w taki sposób, że suma prac sił aktywnych i sił bezwładnościowych wykonana na przemieszczeniach wirtualnych jest równa zero.

Poniżej przedstawiam przykład zastosowania równania (8) w praktyce inżynierskiej. W przykładzie tym analizowany jest układ dwóch mas m_1, m_2 połączonych ze sobą nieważką i nierozciągliwą linką o długości l . Układ ten może powstać np. w płaszczyźnie pionowej przy czym masa m_1 może powstać np. po tnie nachylnym pod kątem φ do poziomu, zaś masa m_2 jedyną w kierunku pionowym.

Przykład: Stosując zasady d'Alemberta obliczyć przyspieszenia punktów materialnych układu jako na rysunku oraz siły w linie. Tarcie w prowadniku A oraz opory tożenia i masy koła pominiąć.



Dane: m_1, m_2, l, g, φ
 l - dł. linku, g - prz. ziemskie

1.) Uwagi wstępne:

$$n=2; \quad m_1, \bar{r}_1; \quad m_2, \bar{r}_2$$

$$\bar{r}_1 = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}$$

$$\bar{r}_2 = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}$$

typ więzów:

$$g_\alpha(\bar{r}_i) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 5$$

$$N = 3n - k = 3 \cdot 2 - 5 = 1$$

$$\delta \bar{r}_i \equiv d\bar{r}_i$$

jest to więc układ holonomiczny i skleronomiczny

więzy: $z_1 = 0, z_2 = 0,$

$$\frac{y_1}{x_1} = \tan \varphi \rightarrow y_1 - x_1 \tan \varphi = 0,$$

$$x_2 = 0, \quad \sqrt{y_1^2 + x_1^2} + y_2 - l = 0$$

Więc ogólnie równ. dyn. (zasada d'Alemberta) przyjmie postać:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) d\bar{r}_i = (\bar{P}_1 - m_1 \ddot{\bar{r}}_1) d\bar{r}_1 + (\bar{P}_2 - m_2 \ddot{\bar{r}}_2) d\bar{r}_2 = 0 \quad (*)$$

a) - siły aktywne:

$$\bar{P}_1 = m_1 g \cdot \bar{j} = G_1 \bar{j} \quad (G_1 = m_1 g)$$

$$\bar{P}_2 = m_2 g \cdot \bar{j} = G_2 \bar{j} \quad (G_2 = m_2 g)$$

b) - pomyślenia i pociągnięcia możliwe

-9- (2)

$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{y}_1 \vec{j} \rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{x}_1 \vec{i} + \ddot{y}_1 \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = y_2 \vec{j} \rightarrow \dot{\vec{r}}_2 = \dot{y}_2 \vec{j} \rightarrow \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{y}_2 \vec{j}$$

$$d\vec{r}_1 = dx_1 \vec{i} + dy_1 \vec{j}$$

$$d\vec{r}_2 = dy_2 \vec{j}$$

Po podstawieniu do równania (*) mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) d\vec{r}_i &= [G_1 \vec{j} - m_1 (\ddot{x}_1 \vec{i} + \ddot{y}_1 \vec{j})] \cdot (dx_1 \vec{i} + dy_1 \vec{j}) + \\ &+ [G_2 \vec{j} - m_2 (\ddot{y}_2 \vec{j})] \cdot dy_2 \vec{j} = \\ &= G_1 dy_1 - m_1 \ddot{x}_1 dx_1 - m_1 \ddot{y}_1 dy_1 + G_2 dy_2 - m_2 \ddot{y}_2 dy_2 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Nie wystąpiły tutaj wartości wyhodowane!

wierimy: $y_1 = x_1 \tan \varphi \quad | (')$; $\sqrt{y_1^2 + x_1^2} + y_2 = l$
 $\dot{y}_1 = \dot{x}_1 \tan \varphi \quad | \cdot dt$; $\sqrt{x_1^2 \tan^2 \varphi + x_1^2} + y_2 = l$
 $dy_1 = dx_1 \tan \varphi$; $x_1 \cdot \sqrt{\tan^2 \varphi + 1} + y_2 = l \quad | (')$
 $\frac{1}{\cos \varphi} \cdot \dot{x}_1 = -\dot{y}_2 \quad | \cdot dt$

$$dx_1 = -\cos \varphi \cdot dy_2$$

$$dy_1 = (-\cos \varphi dy_2) \cdot \tan \varphi = -\sin \varphi \cdot dy_2$$

$$\dot{x}_1 = -\dot{y}_2 \cdot \cos \varphi \quad | (') \rightarrow \ddot{x}_1 = -\ddot{y}_2 \cos \varphi$$

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 \tan \varphi \quad | (') \rightarrow \ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 \tan \varphi = (-\ddot{y}_2 \cos \varphi) \cdot \tan \varphi = -\ddot{y}_2 \sin \varphi$$

Po podstawieniu wykastkiego do (**) mamy:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) d\bar{r}_i = G_1 (-\sin \varphi dy_2) - m_1 (-\ddot{y}_2 \cos \varphi) \cdot (-\cos \varphi dy_2) + \\ - m_1 (-\ddot{y}_2 \sin \varphi) \cdot (-\sin \varphi dy_2) + G_2 dy_2 - m_2 \ddot{y}_2 dy_2 = 0$$

co daje:

$$[-G_1 \sin \varphi - \underbrace{m_1 \ddot{y}_2 \cos^2 \varphi + m_1 \ddot{y}_2 \sin^2 \varphi}_{\text{---} m_1 \ddot{y}_2} + G_2 - m_2 \ddot{y}_2] \cdot dy_2 = 0$$

leci dy_2 - dowolne $\neq 0$ więc:

$$-G_1 \sin \varphi - \ddot{y}_2 m_1 + G_2 - m_2 \ddot{y}_2 = 0,$$

stąd:

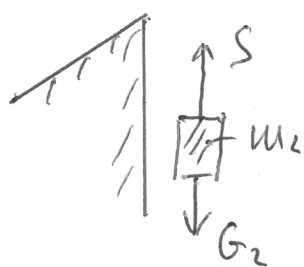
$$\ddot{y}_2 = \frac{G_2 - G_1 \sin \varphi}{m_1 + m_2} = \frac{(m_2 - m_1 \sin \varphi) \cdot g}{m_1 + m_1} \cdot g = \text{const} = a_2$$

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{y}_2 \cos \varphi = \frac{m_1 \sin \varphi - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot \cos \varphi = a_{1x}$$

$$\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2 \sin \varphi = \frac{m_1 \sin \varphi - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot \sin \varphi = a_{1y}$$

Wzrost prędkości $\ddot{\bar{r}}_1, \ddot{\bar{r}}_2$ obliczone mas m_1 i m_2
 postać: $\ddot{\bar{r}}_1 = \bar{a}_1 = (a_{1x}, a_{1y}, 0)$; $\ddot{\bar{r}}_2 = \bar{a}_2 = (0, a_2, 0)$

c) siła w linie

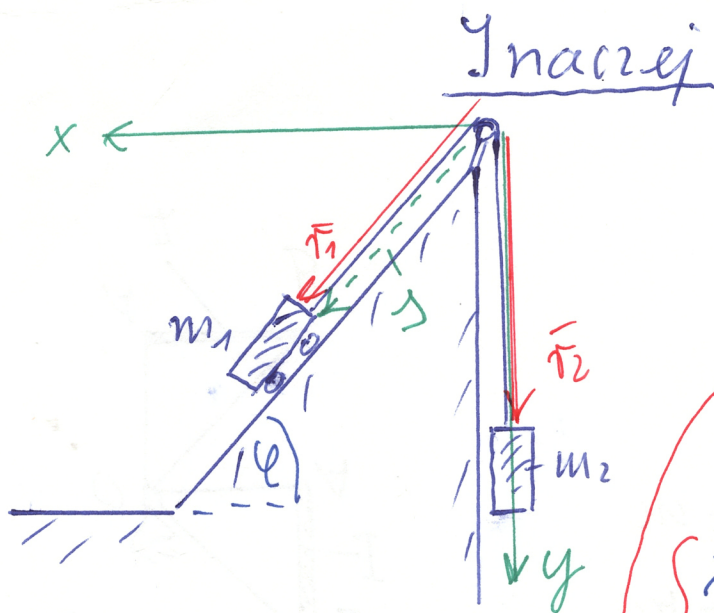


Można ją wyznaczyć wprost z II zasady dynamiki Newtona:

$$m_2 \ddot{y}_2 = G_2 - S$$

$$S = G_2 - m_2 \ddot{y}_2 = G_2 - \frac{m_2 g (m_2 - m_1 \sin \varphi)}{m_1 + m_2}$$

UWAGA: Pomijając postępowanie można zauważyć uproszczenie wprowadzające pojęcie tzw. współzależnych uogólnień. Wprowadza się ich tylko ile stopni swobody ma układ. W naszym przykładzie jest $N = 3n - 1c = 3 \cdot 2 - 5 = 1$ więc wprowadzamy jeden $q = 1$ i wtedy tak postępowanie będzie jak na przykład:



siły aktywne:

$$\bar{P}_1 = m_1 g \bar{j}$$

$$\bar{P}_2 = m_2 g \bar{j}$$

$$N=1$$

$$q = s = |\bar{r}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\bar{r}_1 = s \cos \ell \bar{i} + s \sin \ell \bar{j}$$

$$\bar{r}_2 = (1-s) \bar{j}$$

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{s} (\cos \ell \bar{i} + \sin \ell \bar{j})$$

$$d\bar{r}_1 = ds (\cos \ell \bar{i} + \sin \ell \bar{j})$$

$$\ddot{\bar{r}}_1 = \ddot{s} (\cos \ell \bar{i} + \sin \ell \bar{j})$$

$$\dot{\bar{r}}_2 = -\dot{s} \bar{j}$$

$$d\bar{r}_2 = -ds \bar{j}$$

$$\ddot{\bar{r}}_2 = -\ddot{s} \bar{j}$$

$$\sum_{i=1}^n (\bar{P}_i - m_i \ddot{\bar{r}}_i) d\bar{r}_i = (\bar{P}_1 - m_1 \ddot{\bar{r}}_1) d\bar{r}_1 + (\bar{P}_2 - m_2 \ddot{\bar{r}}_2) d\bar{r}_2 = 0$$

$$[m_1 g \bar{j} - m_1 \ddot{s} (\cos \ell \bar{i} + \sin \ell \bar{j})] \cdot ds (\cos \ell \bar{i} + \sin \ell \bar{j}) + [m_2 g \bar{j} + m_2 \ddot{s} \bar{j}] \cdot (-ds \bar{j}) = 0$$

$$m_1 g \sin \ell ds - m_1 \ddot{s} \cos^2 \ell ds - m_1 \ddot{s} \sin^2 \ell ds + (m_2 g + m_2 \ddot{s}) ds = 0$$

$$m_1 g \sin \ell - m_2 g = (m_1 + m_2) \ddot{s}$$

$$\ddot{s} = \frac{m_1 g \sin \ell - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$(\ddot{s} = -\ddot{y}_2)$$