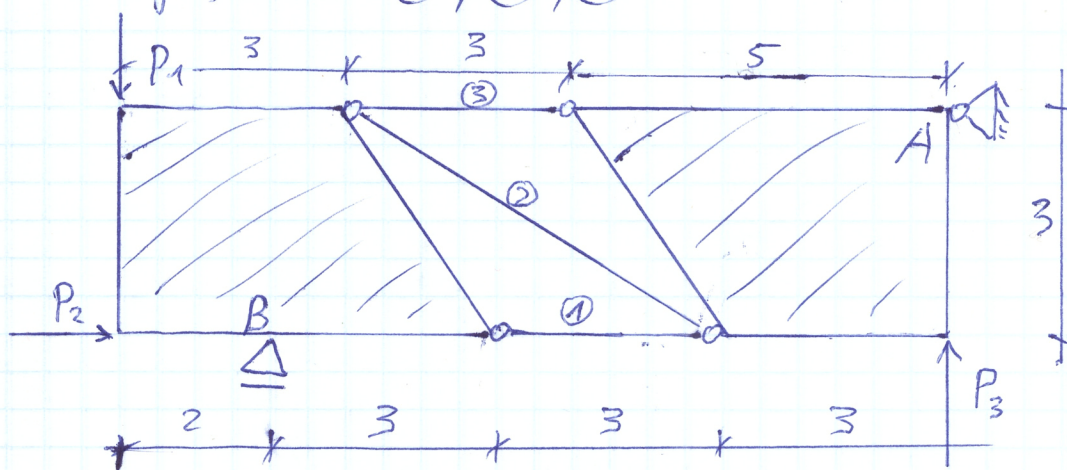


1. Dwie płyty jak na rysunku połączone ze sobą trzema prętami ①, ②, ③. Całość obciążono trzema siłami P_1, P_2, P_3 i uwięziono podporem A, B. Zakładając, że płyty są niewzrusłe wyznaczyć siły reakcji w podporach oraz siły w prętach ①, ②, ③.



$$P_1 = 27 \text{ kN}$$

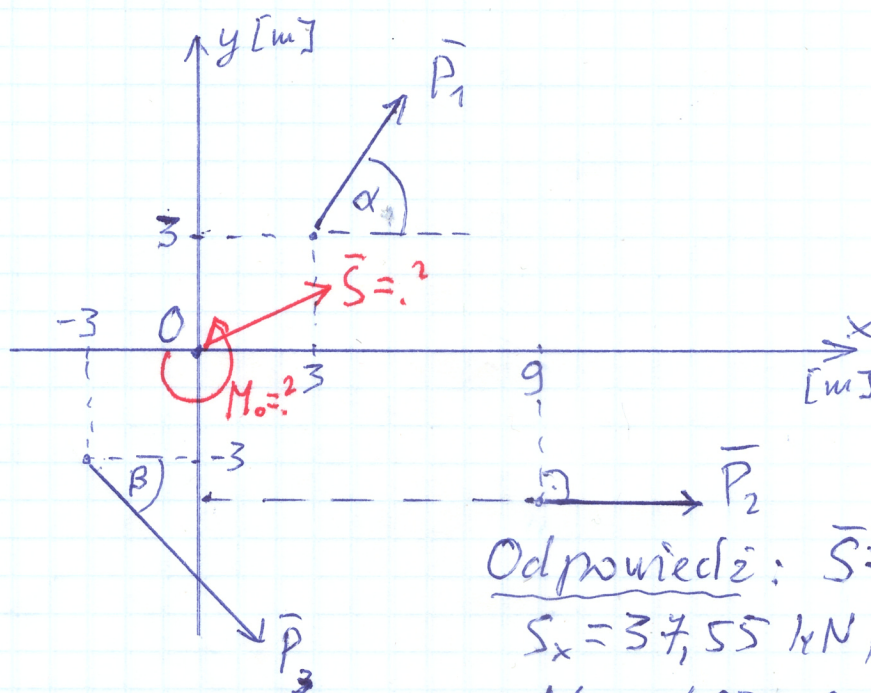
$$P_2 = 60 \text{ kN}$$

$$P_3 = 40 \text{ kN}$$

Odpowiedzi: $V_A = -66$, $H_A = -60$, $V_B = 53$

$$S_1 = -69,33, S_2 = 50,52, S_3 = -34$$

2. Układ trzech sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ jak na rysunku zastęp najprostszym układem równoważnym przyłożonym w punkcie O.



$$P_1 = 20 \text{ kN}$$

$$P_2 = 12 \text{ kN}$$

$$P_3 = 22 \text{ kN}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

Odpowiedź: $\vec{S} = (S_x, S_y)$

$$S_x = 37,55 \text{ kN}, S_y = 1,77 \text{ kN}$$

$$M_o = 163,26 \text{ kNm}$$

3. Układ jak na rysunku składa się z trzech elementów ruchomych:

- pręt $AB=L$ małe m_2 mogącego obracać się dookoła nieruchomego punktu A
- krążka o małe m_3 i pewnym promieniu r mogącego obracać się dookoła nieruchomego punktu O
- masy skupionej m_1 mogącej poruszać się w kierunku pionowym.

Masa m_1 połączona jest z końcem B pręta AB nieważką i nierozciągłą linką przerzuconą przez krążek. Punkt O nieruchomy jest za pomocą belki OC sztywno zamocowanej w punkcie C o długości $OC=b$. W pewnym położeniu równowagi przedstawionym na rysunku wyznaczyć:

- 1) Siłę S w linie,
- 2) Kąt α nachylenia pręta AB do poziomu,
- 3) Reakcje w podporze A ,
- 4) Składowe reakcje w podporze C

dla danych:

$$m_1 = 16 \text{ kg}$$

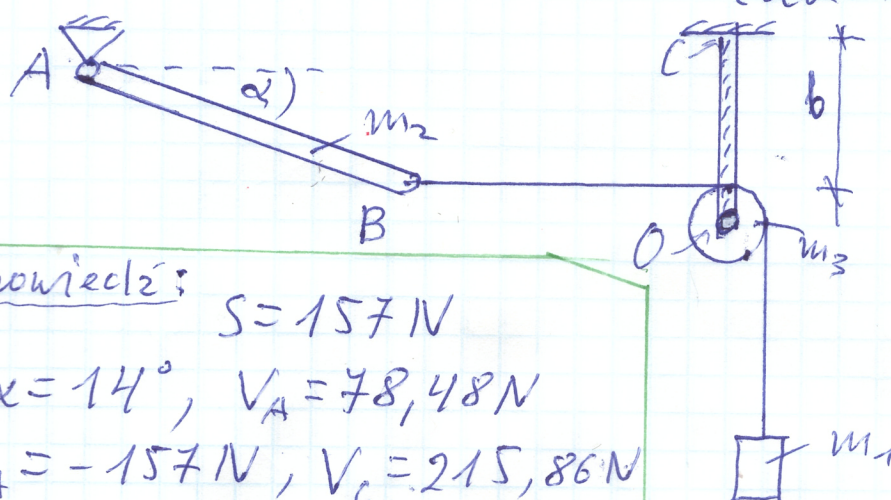
$$m_2 = 8 \text{ kg}$$

$$m_3 = 6 \text{ kg}$$

$$L = 1,8 \text{ m}$$

$$b = 0,8 \text{ m}$$

$$(g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$



Odpowiedź:

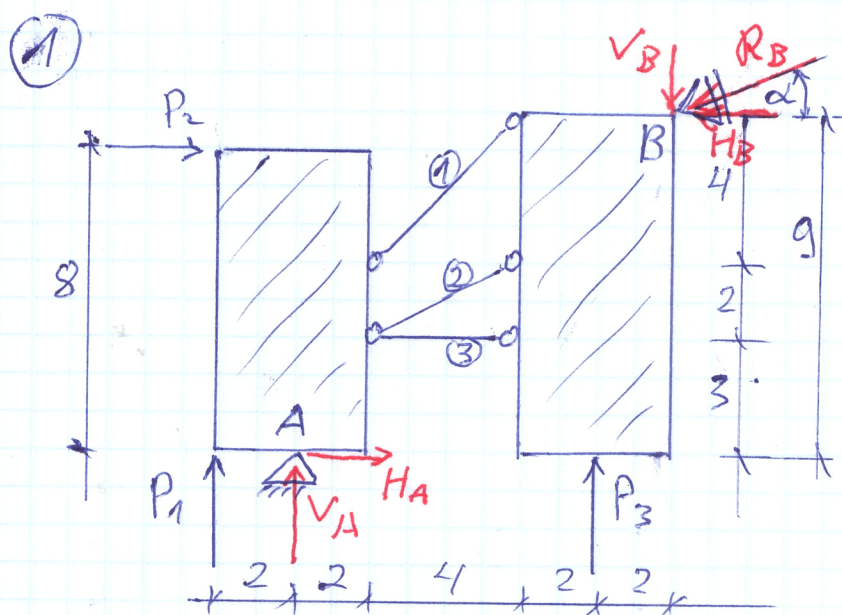
$$S = 157 \text{ N}$$

$$\alpha = 14^\circ, V_A = 78,48 \text{ N}$$

$$H_A = -157 \text{ N}, V_C = 215,86 \text{ N}$$

$$H_C = 157 \text{ N}, M_C = 425,6 \text{ Nm}$$

Przykłady



$$\alpha = 30^\circ$$

$$P_1 = 40 \text{ kN}$$

$$P_2 = 20 \text{ kN}$$

$$P_3 = 10 \text{ kN}$$

$$\vec{R}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B$$

$$\frac{H_B}{V_B} = \cot \alpha$$

$$H_B = R_B \cos \alpha = 0,866 R_B$$

$$V_B = R_B \sin \alpha = 0,5 R_B$$

1) Reakcje:

$$\sum M_A = -P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 8 + P_3 \cdot 8 + H_B \cdot 9 - V_B \cdot 10 = 0$$

$$9 H_B - 10 V_B = 2 P_1 + 8 P_2 - 8 P_3 = 2 \cdot 40 + 8 \cdot 20 - 8 \cdot 10 = 160$$

$$9 (0,866 R_B) - 10 (0,5 R_B) = 160$$

$$R_B (7,794 - 5) = 160 \rightarrow \underline{R_B = 57,27}$$

$$H_B = 0,866 \cdot 57,27 = \underline{49,6 = H_B}$$

$$V_B = 0,5 \cdot R_B = \underline{28,64 = V_B}$$

sprawdź: $\tan \alpha = \frac{V_B}{H_B} = \frac{28,64}{49,6} = 0,5774 = \tan 30^\circ$
O.K.

Dalej: $\sum X = H_A + P_2 - H_B = 0 \rightarrow H_A = H_B - P_2 = 49,6 - 20 = \underline{29,6 = H_A}$

$$\sum Y = V_A + P_1 - V_B + P_3 = 0 \rightarrow V_A = V_B - P_1 - P_3 =$$

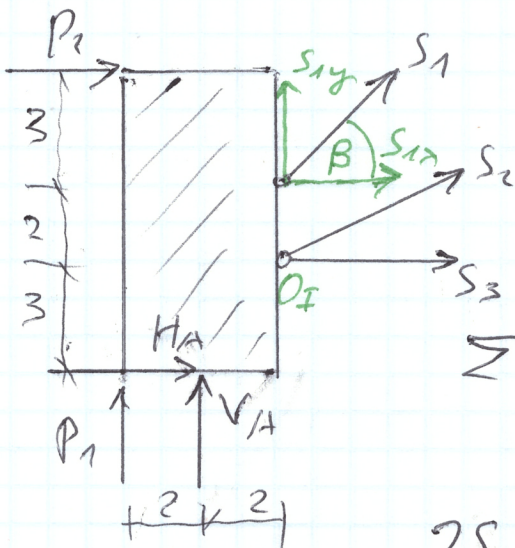
$$= 28,64 - 40 - 10 = -21,36 = \underline{V_A}$$

Spr. reakcji:

$$\begin{aligned}\sum M_B &= -V_A \cdot 10 + H_A \cdot 9 + P_2 \cdot 1 - P_1 \cdot 12 - P_3 \cdot 2 = \\ &= -(-21,36) \cdot 10 + 9 \cdot 29,6 + 20 - 40 \cdot 12 - 10 \cdot 2 = \\ &= \dots = 0 \quad ! \quad \text{OK!}\end{aligned}$$

2) Siła w pręcie ①:

Stosujemy metodę Rittera. Wybrano lewą część konstrukcji:



z rysunku i wyliczeń (4x4) wynika, że $\beta = 45^\circ$

$$\begin{aligned}\text{Więc: } S_{1x} &= S_{1y} = S_1 \cos 45^\circ = \\ &= 0,707 S_1\end{aligned}$$

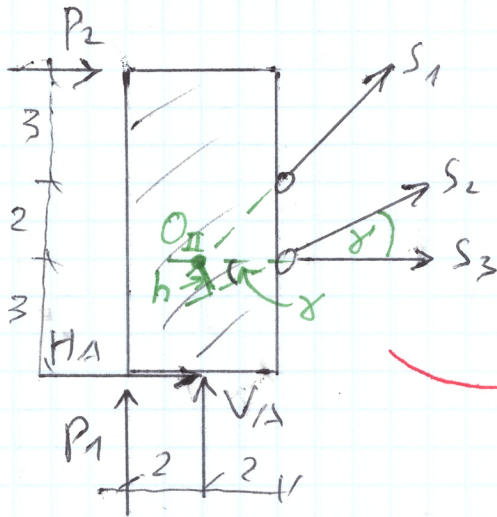
$$\begin{aligned}\sum M_{OI} &= -P_1 \cdot 4 - V_A \cdot 2 + H_A \cdot 3 + \\ &- P_2 \cdot 5 - S_{1x} \cdot 2 + S_{1y} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2S_{1x} &= -4P_1 - 2V_A + 3H_A - 5P_2 = \\ &= -4 \cdot 40 - 2 \cdot (-21,36) + 3 \cdot 29,6 + \\ &- 5 \cdot 20 = -128,48\end{aligned}$$

$$S_{1x} = \frac{-128,48}{2} = -64,24$$

$$S_1 = \frac{S_{1x}}{\cos 45^\circ} = \frac{-64,24}{0,707} = \underline{\underline{-90,86 = S_1}}$$

3) Siła w pręcie (2)



l_2 - długość pręta (2)

$$l_2 = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4,472$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{l_2} = \frac{2}{4,472} = 0,4472$$

$$h = \frac{2^2}{2} = \frac{h}{2} = \sin \alpha$$

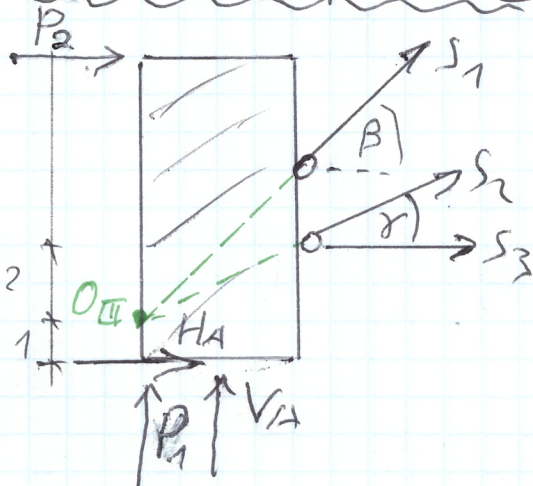
$$h = 2 \cdot \sin \alpha = 0,8944$$

$$\sum M_{O_{II}} = -P_2 \cdot 5 - P_1 \cdot 2 + H_A \cdot 3 + S_2 \cdot h = 0$$

$$S_2 \cdot 0,8944 = 5P_2 + 2P_1 - 3H_A = 100 + 80 - 3 \cdot 29,6 = 91,2$$

$$S_2 = \frac{91,2}{0,8944} = \underline{101,97 = S_2}$$

4) Siła w pręcie (3):

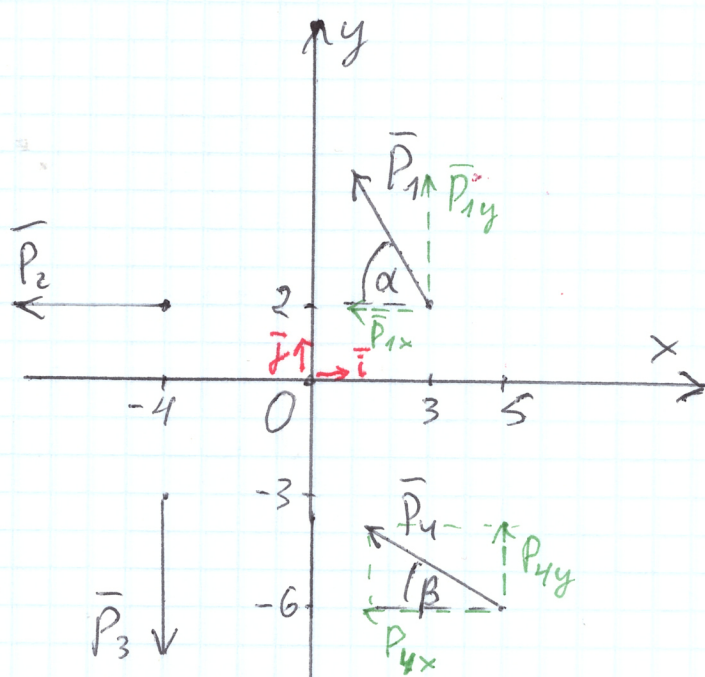


$$\sum M_{O_{III}} = H_A \cdot 1 + V_A \cdot 2 + P_2 \cdot 7 - S_3 \cdot 2 = 0$$

$$2S_3 = H_A + 2V_A - 7P_2 = 29,6 + 2 \cdot (-21,36) - 7 \cdot 20 = -153,12$$

$$S_3 = \frac{-153,12}{2} = \underline{-76,56 = S_3}$$

- ② Układ czterech sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ jak na rysunku zastąpić najprostszym układem równoważnym przyłożonym w punkcie O.



$$\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$$

$$P_1 = 50 \text{ kN}$$

$$P_2 = 30 \text{ kN}$$

$$P_3 = 40 \text{ kN}$$

$$P_4 = 20 \text{ kN}$$

Wektor główny $\vec{S}$:

$$\begin{aligned} S_x &= -P_1 \cos 60^\circ - P_2 + 0 - P_4 \cos 30^\circ = \\ &= -50 \cdot 0,5 - 30 - 20 \cdot 0,866 = -72,3 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= P_1 \sin 60^\circ + 0 - P_3 + P_4 \sin 30^\circ = \\ &= 50 \cdot 0,866 - 40 + 20 \cdot 0,5 = 13,3 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (-72,3; 13,3; 0) = -72,3 \vec{i} + 13,3 \vec{j} + 0 \vec{k} \\ (S &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(-72,3)^2 + (13,3)^2} = 73,5 \text{ kN}) \end{aligned}$$

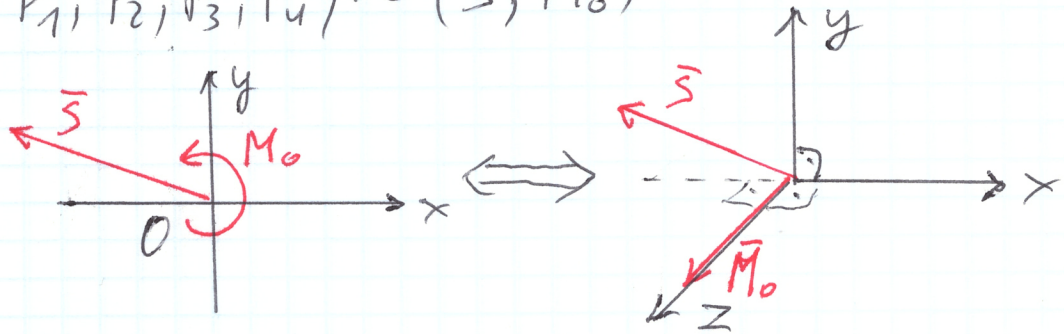
Moment główny $\vec{M}_0$:

$$\begin{aligned} M_0 &= +P_{1x} \cdot 2 + P_{1y} \cdot 3 + P_2 \cdot 2 + P_3 \cdot 4 - P_{4x} \cdot 6 + P_{4y} \cdot 5 = \\ &= 25 \cdot 2 + 43,3 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 40 \cdot 4 - 17,32 \cdot 6 + 5 \cdot 10 = \\ &= +346 \text{ kNm} \end{aligned}$$

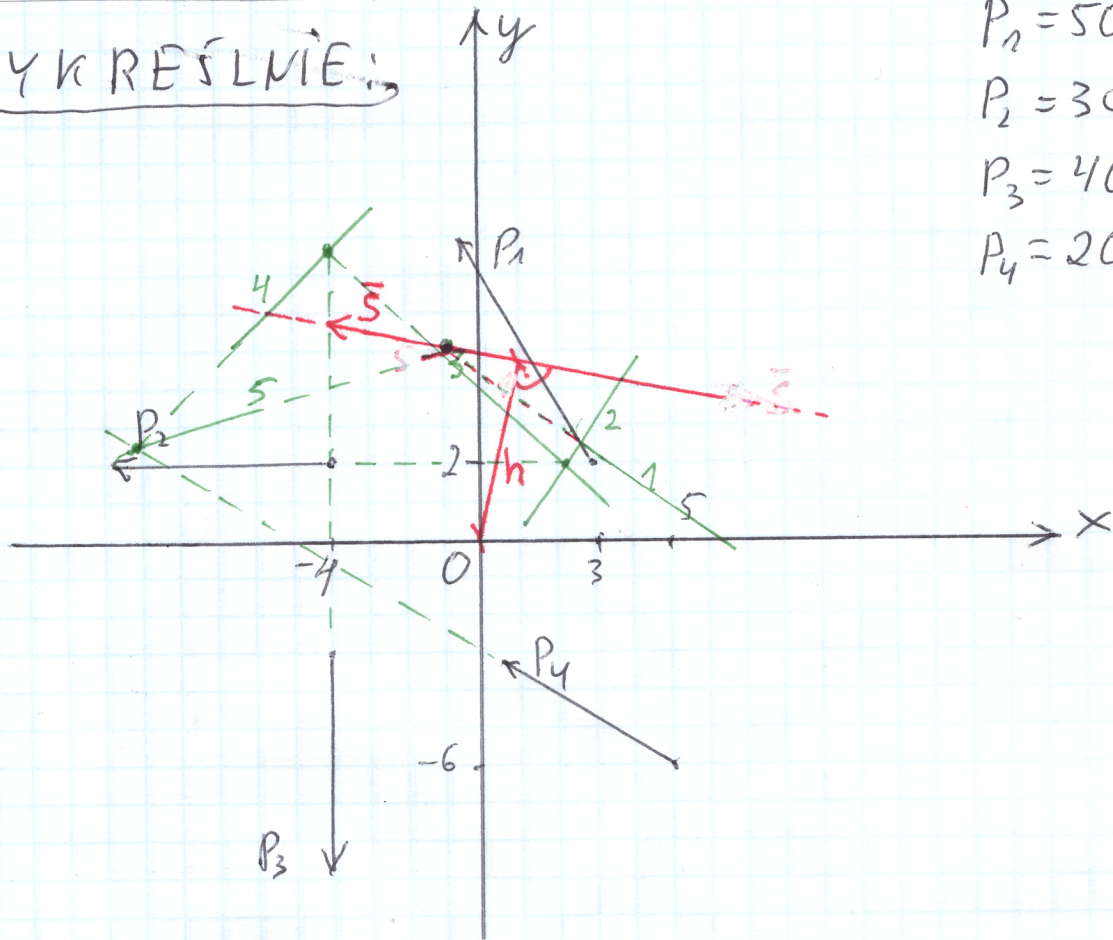
$$\vec{M}_0 = M_0 \vec{k} = 346 \vec{k} = (0, 0, 346)$$

Wektor momentu głównego $\vec{M}_0$ ma wartość 346 kNm, kierunku prostopadły do rysunku, zwrot "do nas".

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4) \sim (\vec{S}, \vec{M}_0)$$



WYKRESLENIE:



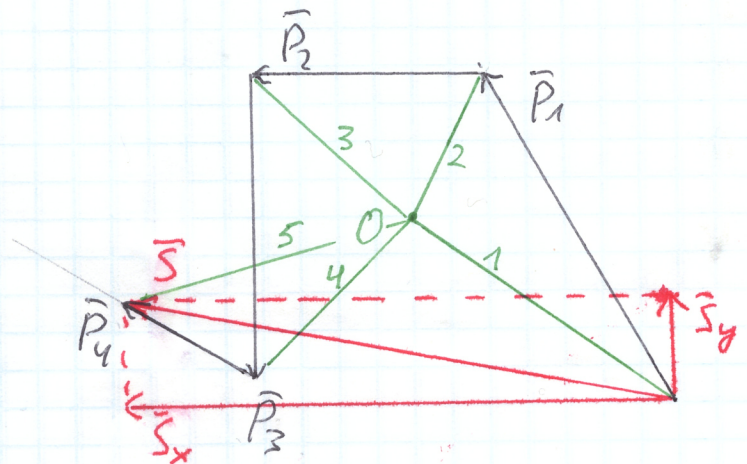
$$P_1 = 50$$

$$P_2 = 30$$

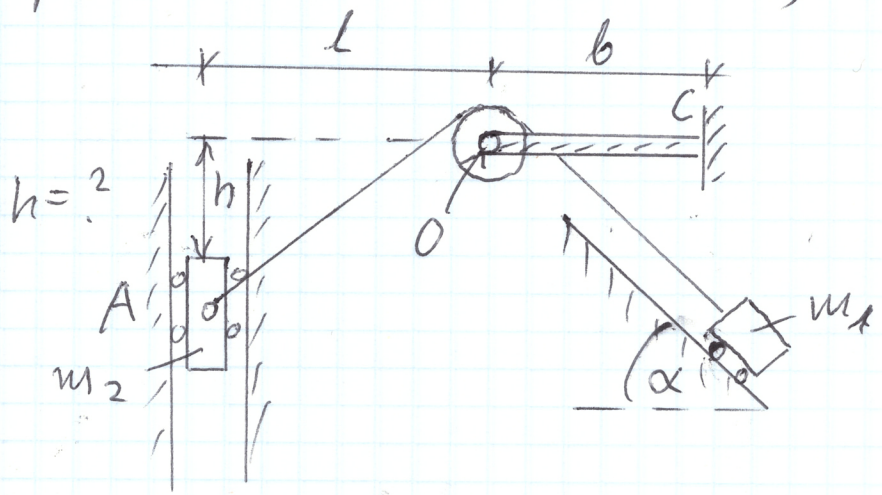
$$P_3 = 40$$

$$P_4 = 20$$

$$M_0 = S \cdot h$$



③ Określ położenie równowagi (wartość h) układu jak na rysunku. Przyjmij, że lina łącząca punkty masowe m_1, m_2 i pręciwna przez krążek o masie m_3 jest nierozciągliwa i nieważka. Punkt masowy m_1 może poruszać się bez tarcia wzdłuż równi pochytej pod kątem α do poziomu. Punkt masowy m_2 może poruszać się bez tarcia w kierunku pionowym. Krążek o masie m_3 i promieniu r może obracać się dookoła nieruchomego punktu O będącego końcem belki OC o długości b i zamocowanej sztywno w punkcie C . Określ siłę S w linie i siły reakcji w położeniu równowagi.



- $\alpha = 60^\circ$
- $m_1 = 40 \text{ kg}$
- $m_2 = 15 \text{ kg}$
- $m_3 = 10 \text{ kg}$
- $l = 0,8 \text{ m}$
- $b = 0,6 \text{ m}$
- $(g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

Rozwiązanie:

Stosujemy warunki równowagi dla każdego elementu ruchomego!

1) Siła w linie (z warunków równowagi układu sił na masę m_1):

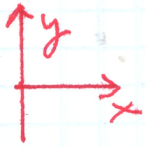


$\bar{S}$ - siła w linie

$\bar{N}$ - siła reakcji toru

$\bar{G}_1$ - siła ciężkości masy m_1

$$G_1 = m_1 g = 40 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 392,4 \text{ N}$$



$$N_x = N \sin \alpha$$

$$N_y = N \cos \alpha$$

$$G_{1x} = 0, \quad G_{1y} = -G_1$$

$$S_x = -S \cos \alpha, \quad S_y = S \sin \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \sum X &= -S \cos \alpha + N \sin \alpha = 0 \\ (2) \quad \sum Y &= -G_1 + S \sin \alpha + N \cos \alpha = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S, N = ?$$

$$(1) \cdot \sin \alpha + (2) \cdot (\cos \alpha) :$$

$$-S \cos \alpha \sin \alpha + N \sin^2 \alpha - G_1 \cos \alpha + S \sin \alpha \cos \alpha + N \cos^2 \alpha = 0$$

$$N(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = G_1 \cos \alpha$$

$$\underline{N = G_1 \cos \alpha} \rightarrow (1) \downarrow$$

$$-S \cos \alpha + G_1 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0 \quad | : \cos \alpha$$

$$S = G_1 \sin \alpha = 392,4 \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= 392,4 \cdot 0,866 = \underline{340 \text{ N} = S}$$

$$N = G_1 \cos \alpha = 392,4 \cdot \cos 66^\circ = 392,4 \cdot 0,5 = \underline{196,2 \text{ N}}$$

↑
wartość siły $\bar{N}$
reakcji toru

↑
(Nierównowaga)
(niejednorodność)

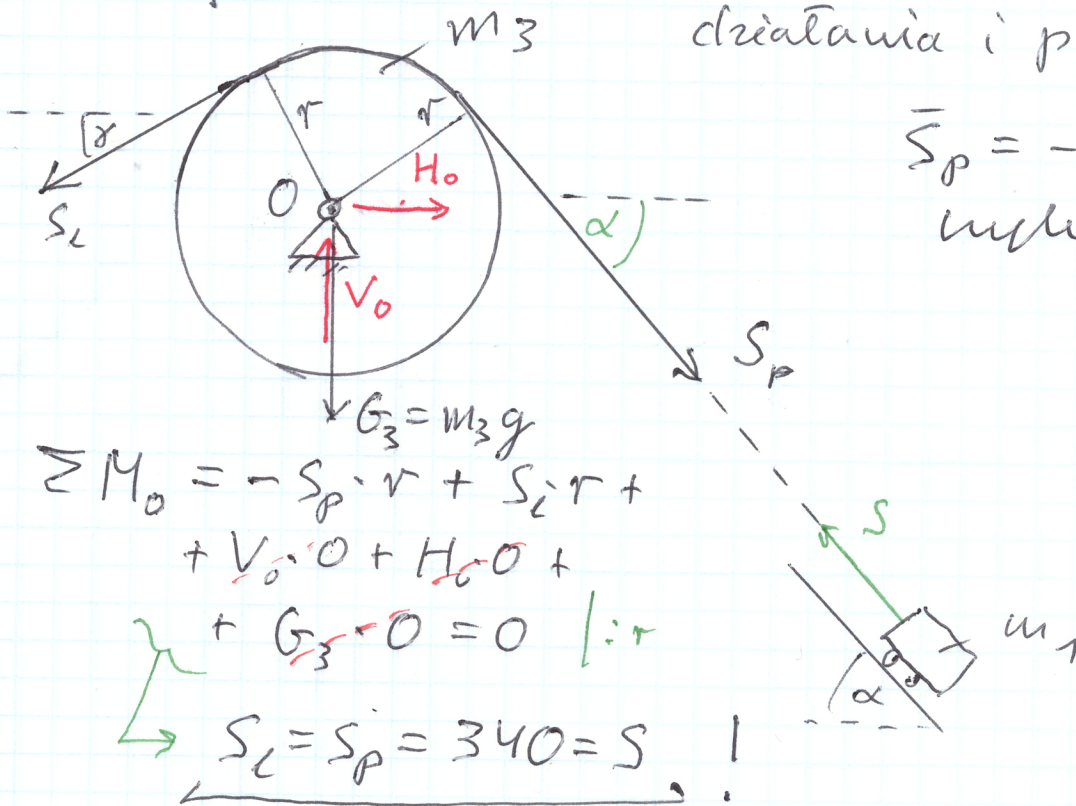
2) Siły reakcji w punkcie O (z warunków równowagi kółka):

$$\gamma = ?$$

Na podstawie zasady działania i przeciwdziałania

$$\vec{S}_p = -\vec{S}$$

$$\text{czyli } S_p = S = 340 \text{ N}$$



$$\begin{aligned} \sum M_O = & -S_p \cdot r + S_L \cdot r + \\ & + V_0 \cdot 0 + H_0 \cdot 0 + \\ & + G_3 \cdot 0 = 0 \quad | :r \end{aligned}$$

$$S_L = S_p = 340 = S !$$

$$\sum X = H_0 + S_p \cos \alpha - S_L \cos \gamma = 0$$

$$\sum Y = V_0 - S_L \sin \gamma - S_p \sin \alpha - G_3 = 0$$

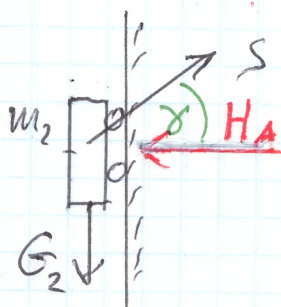
$$G_3 = m_3 g = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 98,1 \text{ N}$$

$$\sum X = H_0 + S (\cos \alpha - \cos \gamma) = 0$$

$$\sum Y = V_0 - S (\sin \gamma + \sin \alpha) - G_3 = 0$$

$\rightarrow H_0, V_0$
nie da się
bo nie znamy $\gamma = ?$

3) Siły na m_2 (2 warunków równowagi masy m_2)



$\vec{H}_A$ - siła reakcji tory na masę m_2

$\vec{S}$ - siła w linie = 340 N

$$G_2 = m_2 g = 15 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 147,2 \text{ N}$$

$$\sum X = -H_A + S \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y = -G_2 + S \sin \alpha = 0 \rightarrow \sin \alpha = \frac{G_2}{S} = \frac{147,2}{340} =$$

$$\sin \alpha = 0,4323$$

$$\cos \alpha = \cos 25,6 = 0,9018$$

$$\alpha = 25,6^\circ$$

$$\Rightarrow \sum X \rightarrow H_A = S \cos \alpha = 340 \cdot 0,9018 = \underline{306,6 \text{ N} = H_A}$$

Wracamy do punktu (2) bo znamy już α

$\Rightarrow \sum X$ dla punktu (2) mamy:

$$H_0 = S(\cos \alpha + \cos \alpha) = 340 \cdot (\cos 25,6^\circ + \cos 60^\circ) =$$

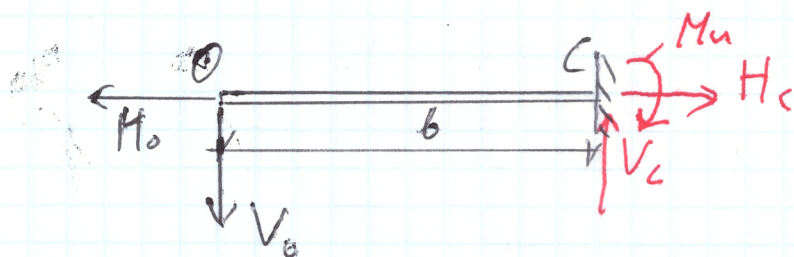
$$= \underline{136,6 \text{ N} = H_0}$$

$\Rightarrow \sum Y$ dla punktu (2) mamy:

$$V_0 = G_3 + S(\sin \alpha + \sin \alpha) = 340 \cdot (\sin 25,6^\circ + \sin 60^\circ) + G_3 =$$

$$= 441,4 + 98,1 = \underline{539,5 \text{ N} = V_0}$$

4) użyj reakcji w belce OC:



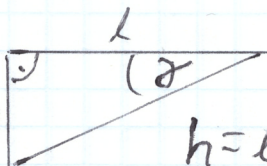
$$\sum X = -H_0 + H_c = 0 \rightarrow H_c = H_0 = \underline{136,6 \text{ N} = H_c}$$

$$\sum Y = -V_0 + V_c = 0 \rightarrow V_c = V_0 = \underline{539,6 \text{ N} = V_c}$$

$$\sum M_c = V_0 \cdot b + M_u = 0 \rightarrow M_u = V_0 \cdot b = 539,6 \cdot 0,6 =$$

$$= \underline{323,7 \text{ Nm} = M_u}$$

5) wysokość h:



$$h = l \tan \alpha = 0,8 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \underline{0,38 \text{ m} = h}$$