Arytmetyka komputerów

wer. 10

Wojciech Myszka

2020-10-29 12:02:40 +0100

Politechnika Wrocławska

Liczby binarne

Liczby dwójkowe nie są wcale nowym wynalazkiem:

- Pierwsze wzmianki pochodzą z Indii, z 5–2 w. pne.
- W Chinach księga I Ching składa się z 64 heksagramów i gdzieś tak w XI w ponumerowano je (od 0 do 63) z użyciem yin jako 0, yang jako 1.
- System opisał bardzo dokładnie matematyk, Goetfryd Leibnitz; patrz na przykład: http://books.google.pl/books?id=Fuk8AAAAcAAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false. Inspirował się I Ching.

System dwójkowy

System dwójkowy to pozycyjny system zapisu liczb używający jako bazy (podstawy) liczby 2.

1. Dwie cyfry: 0 i 1.
2. W systemie dziesiętnym (przy podstawie 10) cyfr jest 10: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
3. W systemie ósemkowym (przy podstawie 8) cyfr jest osiem: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
4. W systemie szesnastkowym (przy podstawie 16) cyfr jest 16: 0, 1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Przykłady:

10	2	16
10	1010	A
100	1100100	64
123,75	1111011,11	7B,C

Czemu system szesnastkowy jest ważny?

- Każda cyfra dwójkowa to jeden bit (od **bi**nary digi**t**). W skrócie b (małe b).
- Osiem bitów to jeden bajt. W skrócie B (wielkie B).
- Komputery zwykle używają parzystych wielokrotności bajtów do zapisu liczb (dwa, cztery albo osiem).
- Każda cyfra szesnastkowa to cztery bity, zatem jeden bajt to dwie cyfry szesnastkowe.
- Stosunkowo łatwo zapamiętać binarny wygląd wszystkich cyfr szesnastkowych...

Duże liczby I

W układzie dziesiętnym używamy przedrostków:

- kilo (10^3), mega (10^6), giga (10^9),... do oznaczania dużych liczb lub
- mili (10^{-3}, mikro (10^{-6}), nano (10^{-9}),... do zapisu małych liczb

2^{10} to 1024 i przez analogię zaczęto nazywać to „kilo" (1024 bajtów to 1 „kilo-bajt").
Ale nie jest to prawidłowe!
W końcu ustandaryzowano nazwy (norma IEC 60027-2:1998):

kibi	Ki	2^{10}	pebi	Pi	2^{50}
mebi	Mi	2^{20}	eksbi	Ei	2^{60}
gibi	Gi	2^{30}	zebi	Zi	2^{70}
tebi	Ti	2^{40}	jobi	Yi	2^{80}

Liczby całkowite:

Liczbę dzielimy przez dwa zapisując reszty z dzielenia:

10

Liczby całkowite:

Liczbę dzielimy przez dwa zapisując reszty z dzielenia:

10	
5	0

Liczby całkowite:

Liczbę dzielimy przez dwa zapisując reszty z dzielenia:

10	
5	0
2	1

Liczby całkowite:

Liczbę dzielimy przez dwa zapisując reszty z dzielenia:

10	
5	0
2	1
1	0

Liczby całkowite:

Liczbę dzielimy przez dwa zapisując reszty z dzielenia:

10	
5	0
2	1
1	0
0	1

Liczby całkowite:

Liczbę dzielimy przez dwa zapisując reszty z dzielenia:

10	
5	0
2	1
1	0
0	1

Reszty z dzielenia zapisujemy „od końca” otrzymując 1010

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

| ,33

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56
1	,12

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56
1	,12
0	,24

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56
1	,12
0	,24
0	,48

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56
1	,12
0	,24
0	,48
0	,96

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56
1	,12
0	,24
0	,48
0	,96
1	,92

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56
1	,12
0	,24
0	,48
0	,96
1	,92
1	,84

Konwersje

Ułamki dziesiętne

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56
1	,12
0	,24
0	,48
0	,96
1	,92
1	,84
1	,68

Ułamki dziesiętne:

Liczbę mnożymy przez dwa i zapisujemy część całkowitą:

	,33
0	,66
1	,32
0	,64
1	,28
0	,56
1	,12
0	,24
0	,48
0	,96
1	,92
1	,84
1	,68

$0{,}010101000111_2 = 0{,}329833984375_{10}$

Do zrobienia w domu!

Procesor

Operacje logiczne

Iloczyn $Y = A \bigcap B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Suma $Y = A \bigcup B$

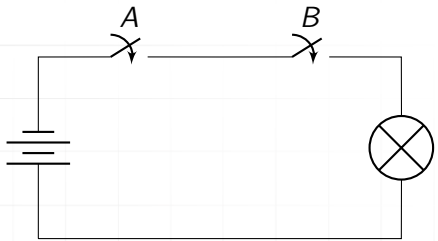
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Różnica symetryczna $Y = A \bigoplus B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operacje logiczne

Iloczyn logiczny

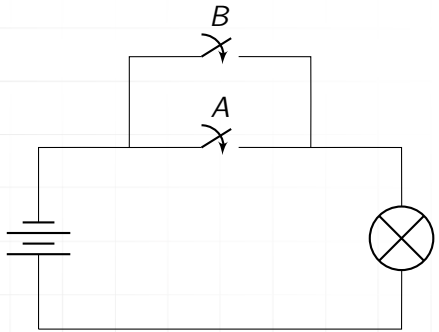


$A \cap B$

AND	0	1
0	0	0
1	0	1

Operacje logiczne

Suma logiczna



$A \cup B$

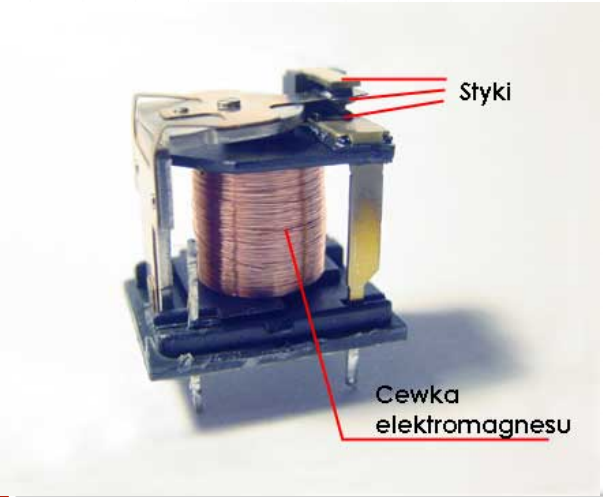
OR	0	1
0	0	1
1	1	1

Operacje logiczne
XOR

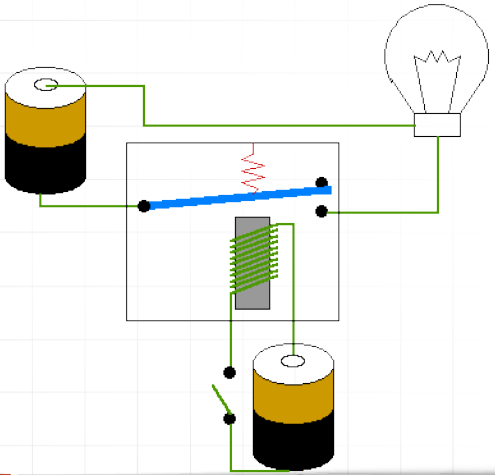
XOR	0	1
0	0	1
1	1	0

$$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

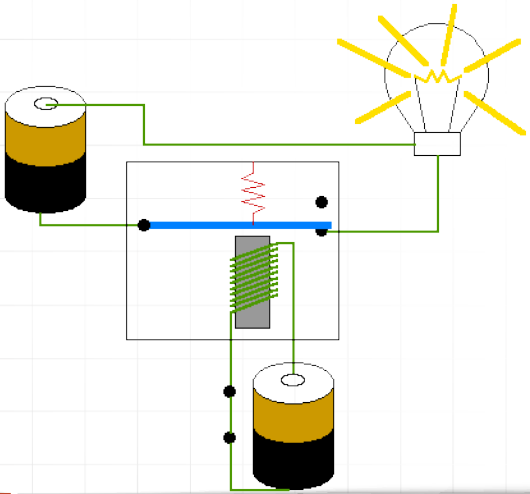
Przekaźnik



Przekaźnik

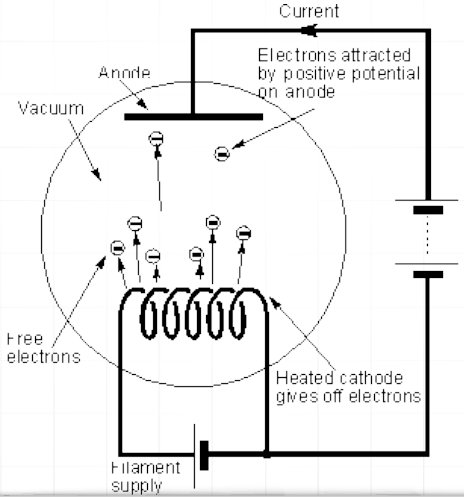


Przekaźnik



Lampy elektronowe

Dioda



Rysunek: Schemat działania diody próżniowej

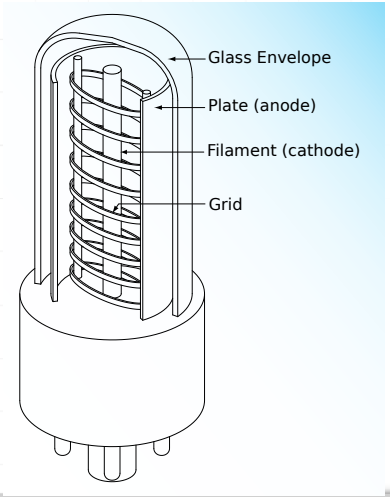
Lampy elektronowe

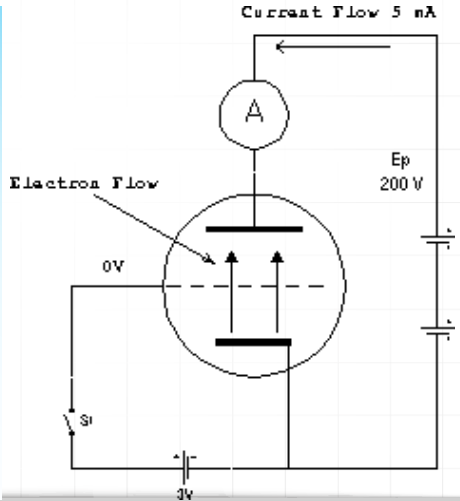
Dioda

Rysunek: Rzeczywisty wygląd diody półprzewodnikowej DY87 używanej w pierwszych telewizorach do uzyskania wysokiego stałego napięcia do zasilania kineskopu

Lampy elektronowe

Trioda





Rysunek: Schemat działania triody

Binarne operacje arytmetyczne

Oto „tablice prawdy" dla dodawania i mnożenia:

1. Suma:
   - $0 + 0 = 0$
   - $0 + 1 = 1$
   - $1 + 0 = 1$
   - $1 + 1 = 10$

Binarne operacje arytmetyczne

Oto „tablice prawdy" dla dodawania i mnożenia:

1. Suma:
   - $0 + 0 = 0$
   - $0 + 1 = 1$
   - $1 + 0 = 1$
   - $1 + 1 = 10$
2. Iloczyn
   - $0 * 0 = 0$
   - $0 * 1 = 0$
   - $1 * 0 = 0$
   - $1 * 1 = 1$

Procesor

Jak procesor dodaje?

1. „Półsumator”
2. Suma dwu bitów ($Y = X_1 + X_2$)
3. Przeniesienie (C_{out})
4. „Tabela prawdy”

X_1	X_2	Y	C_{out}
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$Y = X_1 \oplus X_2$$

$$C_{\text{out}} = X_1 \cap X_2$$

Procesor

Jak procesor dodaje — sumator

C_{in}	X_1	X_2	Y	C_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

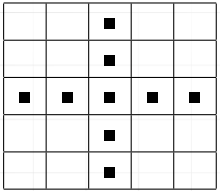
$$Y = C_{\text{in}} \oplus (X_1 \oplus X_2)$$

$$C_{\text{out}} = (X_1 \cap X_2) \cup (C_{\text{in}} \cap (X_1 \oplus X_2))$$

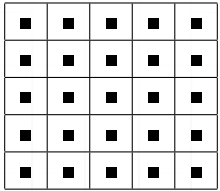
Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

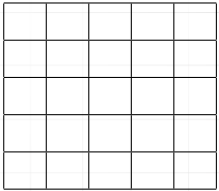
Znak



Kursor



Wynik



Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

Znak

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

Kursor

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Wynik

Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

Znak

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

Kursor

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Wynik

1				

Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

Znak

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

Kursor

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Wynik

1	1			

Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

Znak

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

Kursor

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Wynik

1	1	0		

Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

Znak

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

Kursor

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Wynik

1	1	0	1	

Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

Znak

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

Kursor

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Wynik

1	1	0	1	1

Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

Znak

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

Kursor

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Wynik

1	1	0	1	1

Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

Znak

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

Kursor

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

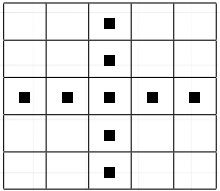
Wynik

1	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	1

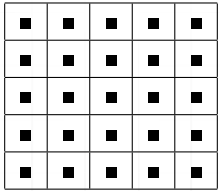
Operacje logiczne

Zastosowanie XOR

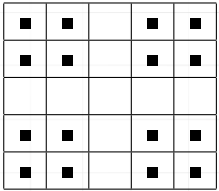
Znak



Kursor



Wynik



XOR — Patent nonsense

Method for dynamically viewing image elements stored in a random access

Patent number: 4197590
Filing date: Jan 19, 1978
Issue date: Apr 8, 1980
Inventors: Josef S. Sukonick, Greg J. Tilden
Assignees: NuGraphics, Inc.
Primary Examiner: Thomas M. Heckler

Zapis liczb w komputerze

- Jedna cyfra dwójkowa to **bit**: **BI**nary digi**T**. Jest to ten sam bit co w przypadku pomiaru ilości informacji.
- Bity grupowane są po osiem; osiem bitów to **bajt**
- 00000000 to 0 (zero)
- 11111111 to 255 ($1 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 2^8 - 1$
- bajty bywają grupowane po
  - dwa (komputer szesnastobitowy)
  - cztery — trzydziestodwubitowy
  - osiem — sześćdziesięciocztero-bitowy

Liczby ujemne?

1. W systemie dziesiętnym: $+3$ albo 3, a ujemne: -3
2. W dwójkowym teoretycznie: $+00000011$ albo -00000011
3. Ale jak zapisać znaki $+$ i $-$?
4. Wariant najprostszy $\quad 3$ — 00000011
5. Wariant najprostszy -3 — 10000011
6. Jak wygodnie prowadzić obliczenia na liczbach całkowitych (dodatnich i ujemnych)?

Liczby ujemne

Tablica odejmowania:

$-$	0	1
0	0	1
1	1	0

(Zakładamy, że operujemy na liczbach czterobitowych!)

$$0011 - 1 = 0010$$

$$0010 - 1 = 0001$$

$$0001 - 1 = 0000$$

$$0000 - 1 = 1111$$

Zatem -1 to 1111 (czterobitowo!)

Liczby ujemne

Dokonajmy prostego sprawdzenia:

$$5 + (-1)$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Liczby ujemne

Dokonajmy prostego sprawdzenia:

$$5 + (-1)$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Dygresja

Liczby dziesiętne, dwucyfrowe:

$$\begin{array}{rr} 3 & 3 \\ 9 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Dygresja

Liczby dziesiętne, dwucyfrowe:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 3 \\ & 9 & 9 \\ \hline 1 & 3 & 2 \end{array}$$

Negacja liczby

Mnemotechniczny algorytm negacji jest bardzo prosty: „negujemy" (przełączamy) wszystkie bity i powstałą liczbę zwiększamy o 1:
1 to 0001
negacje: 1110
zwiększenie o 1: 1111
2 to 0010
negacja: 1101
zwiększenie o 1: 1110
sprawdzenie $5 + (-2)$

	0	1	0	1
	1	1	1	0
1	0	0	1	1

Mnożenie?

Ćwiczenie/Zadanie domowe

Załóżmy, że nasz komputer jest 5-bitowy (4 bity + znak?)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
* & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$