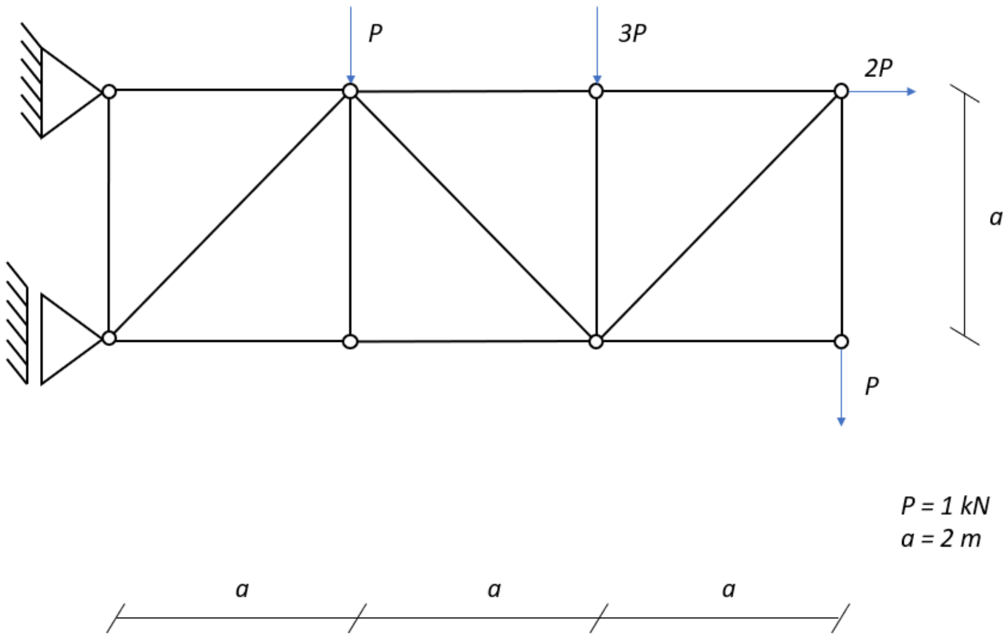
Kratownice – metoda wydzielania (równoważenia) węzłów

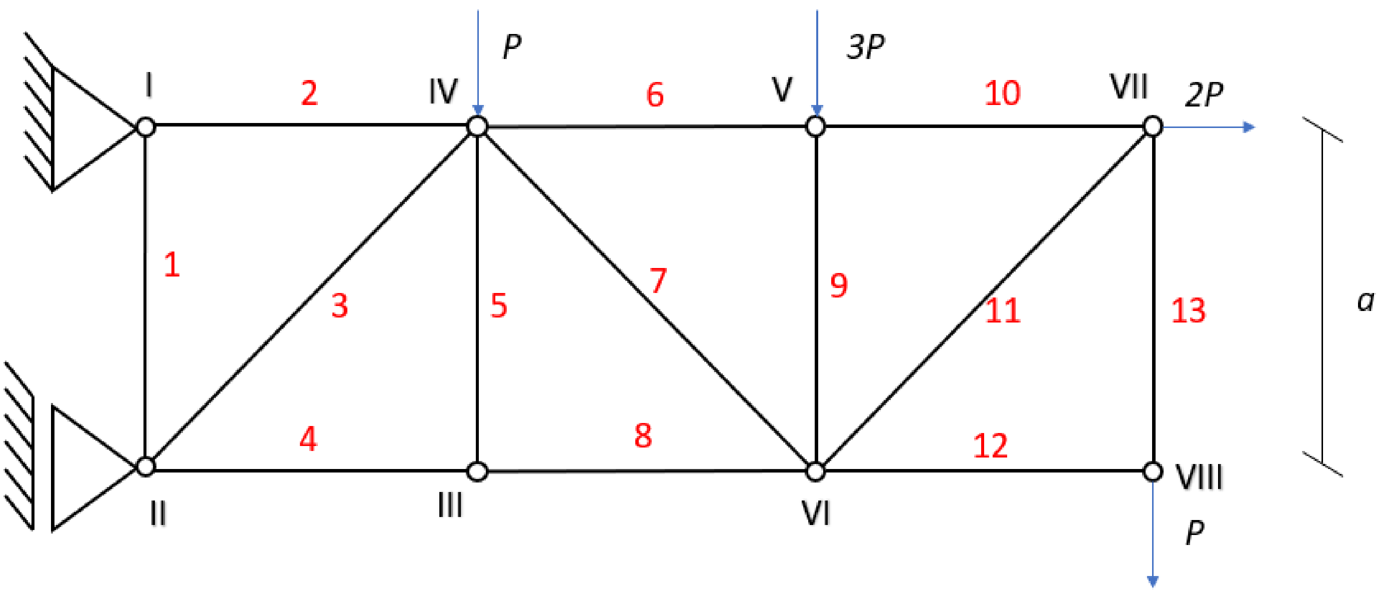
W skrócie:

Metoda ta polega na wypisywaniu równań równowagi dla każdego myślowo wyciętego węzła kratownicy.

1. Podpory zastępujemy reakcjami (składowymi reakcji) – tzw. uwalnianie z więzów.
2. Z równań równowagi wyznaczamy wartości składowych reakcji podporowych.
3. W poszczególnych myślowo wyciętych węzłach kratownicy zapisujemy dwa równania równowagi. W tym celu w węźle zakładamy odpowiednie zwroty sił w poszczególnych prętach.
4. Z zapisanych równań równowagi wyznaczamy siły we wszystkich prętach kratownicy. Najlepiej rozpocząć węzła, w którym nieznane są 2 siły.



Na początek wprowadzimy numerację węzłów i prętów oraz zaznaczymy reakcje w podporach.

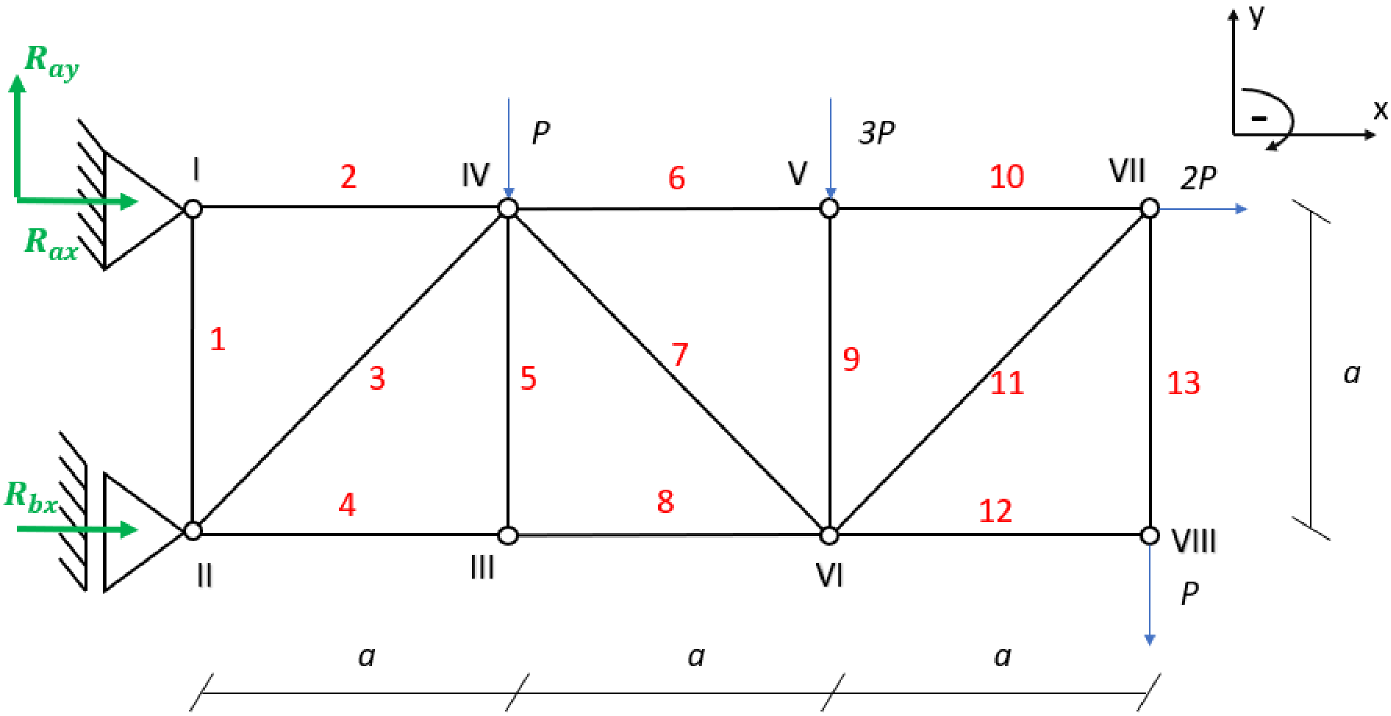


Sprawdzamy warunek statycznej wyznaczalności:
więzły = 8
pręty = 13

$$R = 2W - K$$
$$3 = 2 * 8 - 13$$

Kratownica jest statycznie wyznaczalna.

Następnie zastępujemy podpory reakcjami oraz je wyliczamy z warunków równowagi.



$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} + 2P + R_{bx} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - P - 3P - P = 0$$
$$\sum M_A = 0 \qquad R_{bx} * a - 3P * 2a - P * a - P * 3a = 0$$

$$R_{ay} = 5P = 5kN$$
$$R_{bx} = 10P = 10kN$$
$$R_{ax} = -R_{bx} - 2P = -12kN$$

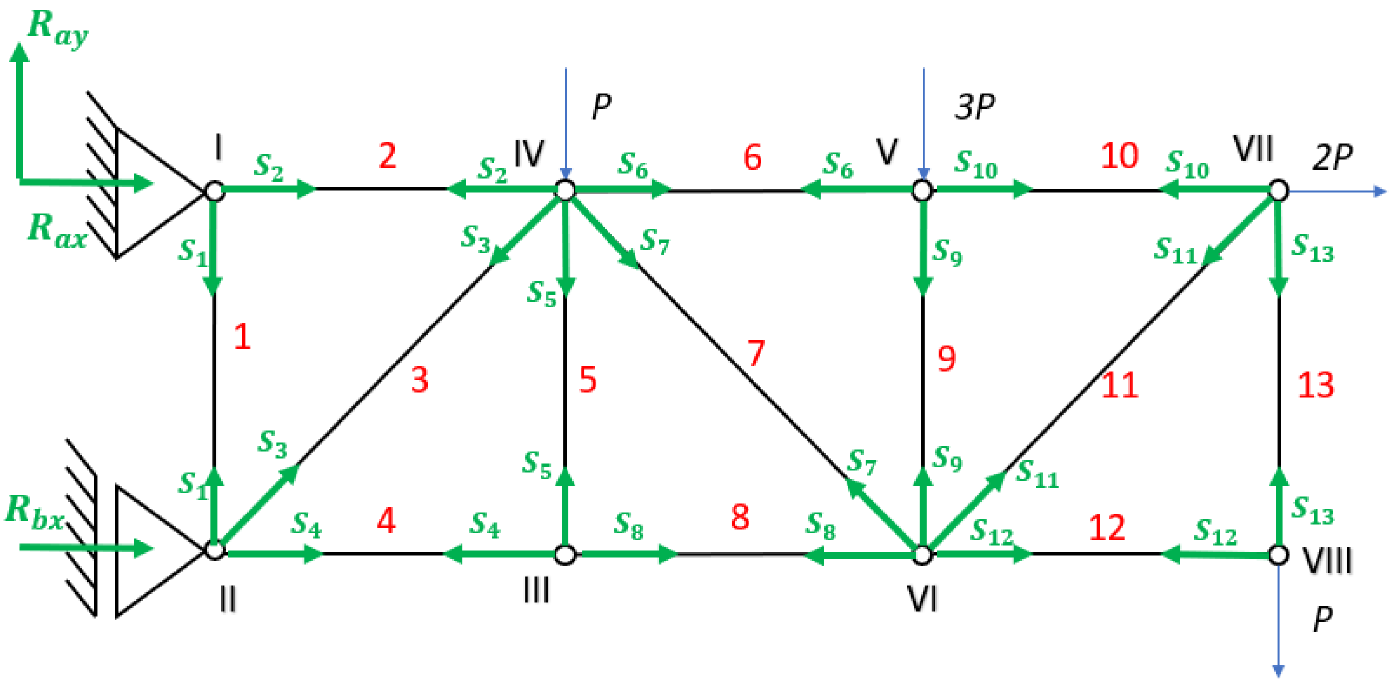
Komentarz: Reakcja R_{ax} jest ujemna, a więc jej rzeczywisty zwrot jest w przeciwną stronę niż zaznaczono na rysunku.

Następy krok to zaznaczenie sił wewnętrznych w prętach. Przyjmujemy, że wszystkie pręty są rozciągane (jeśli nasze założenie będzie mylne, pokaże nam to ujemny znak siły w danym pręcie).

Uwaga! Oznaczenie faktu, iż pręt jest rozciągany może być nieco nieintuicyjne. Wynika to z faktu, że mamy to do czynienia z parą sił – siłą z jaką pręt oddziałuje na węzeł oraz równą co do wartości lecz z przeciwnym zwrotem siłę z jaką węzeł oddziałuje na pręt. Zgodnie z powszechnie przyjętą konwencją na rysunku siły zaznaczamy tak jak działają one na węzeł – co ma też sens wobec tego że analizujemy poszczególne węzły, a nie pręty. Poniżej przedstawiono schematycznie założenia tej konwencji.

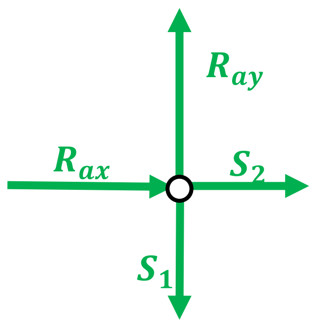
Pręt rozciągany

Pręt ściskany



Teraz przechodzimy do sedna sprawy – wydzielania węzłów. Dla każdego z wydzielonych węzłów zapisujemy warunki równowagi płaskiego zbieżnego układu sił, a więc sumy rzutów sił na oś X i Y mają być równe zero.

<u>Węzeł nr I:</u>



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

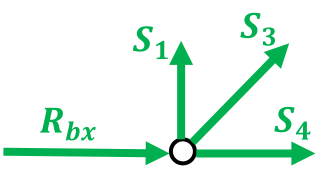
$$R_{ax} + S_2 = 0$$

$$R_{ay} - S_1 = 0$$

$$S_2 = -R_{ax} = -(-12\ kN) = 12\ kN$$

$$S_1 = R_{ay} = 5\ kN$$

<u>Węzeł nr II:</u>



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

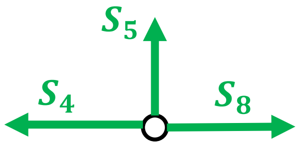
$$R_{bx} + S_4 + S_3 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_1 + S_3 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_3 = -S_1 * \sqrt{2} = -5\sqrt{2}\ kN$$

$$S_4 = -R_{ax} - S_3 * \frac{\sqrt{2}}{2} = -10 - \left(-5\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -5\ kN$$

Węzeł nr III:



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

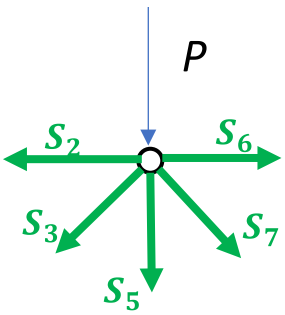
$$-S_4 + S_8 = 0$$

$$S_5 = 0$$

$$S_8 = S_4 = -5\ kN$$

$$S_5 = 0\ kN$$

Węzeł nr IV:



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

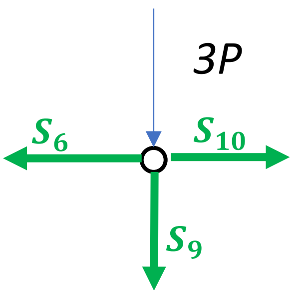
$$-S_2 - S_3 * \frac{\sqrt{2}}{2} + S_6 + S_7 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$-P - S_3 * \frac{\sqrt{2}}{2} - S_7 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_7 = -P * \sqrt{2} - S_3 = -\sqrt{2} - \left(-5\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}\ kN$$

$$S_6 = S_2 + S_3 * \frac{\sqrt{2}}{2} - S_7 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 12 + \left(-5\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 4\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\ kN$$

Węzeł nr V:



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

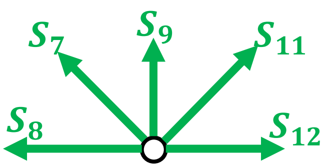
$$-S_6 + S_{10} = 0$$

$$-S_9 - 3P = 0$$

$$S_{10} = S_6 = 3\ kN$$

$$S_9 = -3P = -3\ kN$$

Węzeł nr VI:



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

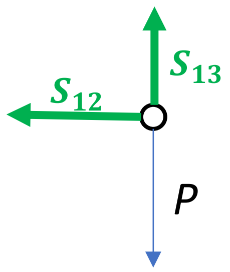
$$-S_8 - S_7 * \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{12} + S_{11} * \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_9 + S_7 * \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{11} * \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$S_{11} = -S_9 * \sqrt{2} - S_7 = -(-3) * \sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -\sqrt{2}\ kN$$

$$S_{12} = S_8 + S_7 * \frac{\sqrt{2}}{2} - S_{11} * \frac{\sqrt{2}}{2} = -5 + 4\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\sqrt{2}) * \frac{\sqrt{2}}{2} = 0\ kN$$

Węzeł nr VIII:



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

$$S_{12} = 0$$

$$S_{13} - P = 0$$

$$S_{13} = P = 1\ kN$$

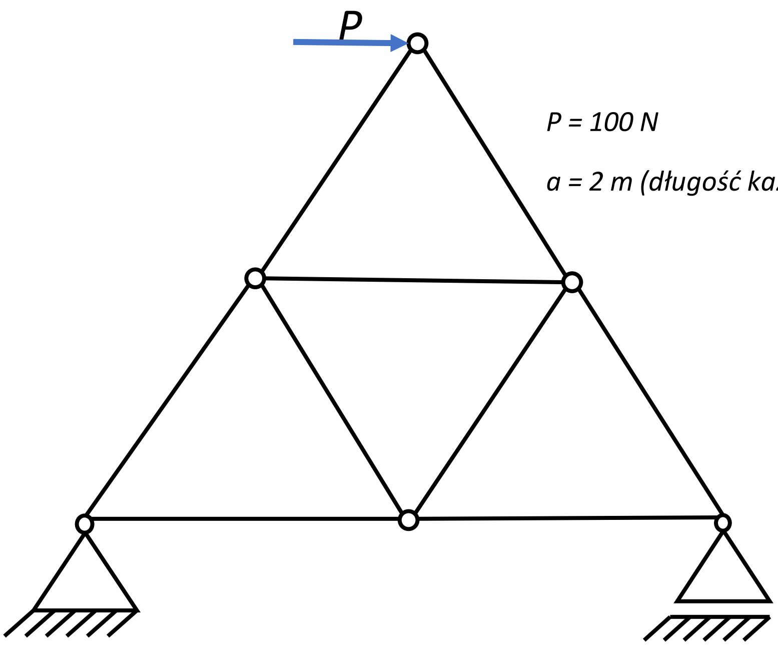
Po wyliczeniu wszystkich sił wewnętrznych w prętach kratownicy tworzymy tabelę zbiorczą z wartościami i zwrotami sił (indeks odpowiada numerowi pręta).

Nr	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}
Wartość [kN]	5	12	$5\sqrt{2}$	5	0	3	$4\sqrt{2}$	5	3	3	$\sqrt{2}$	0	1
Zwrot	+	+	-	-		+	+	-	-	+	-		+

Komentarz: Pręty, przy których występuje znak dodatni są rozciąganie. Tam gdzie znak ujemny – pręt jest ściskany. Występują również tzw. pręty zerowe, które nie przenoszą obciążenia. W tym przypadku to pręty nr 5 i 12.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

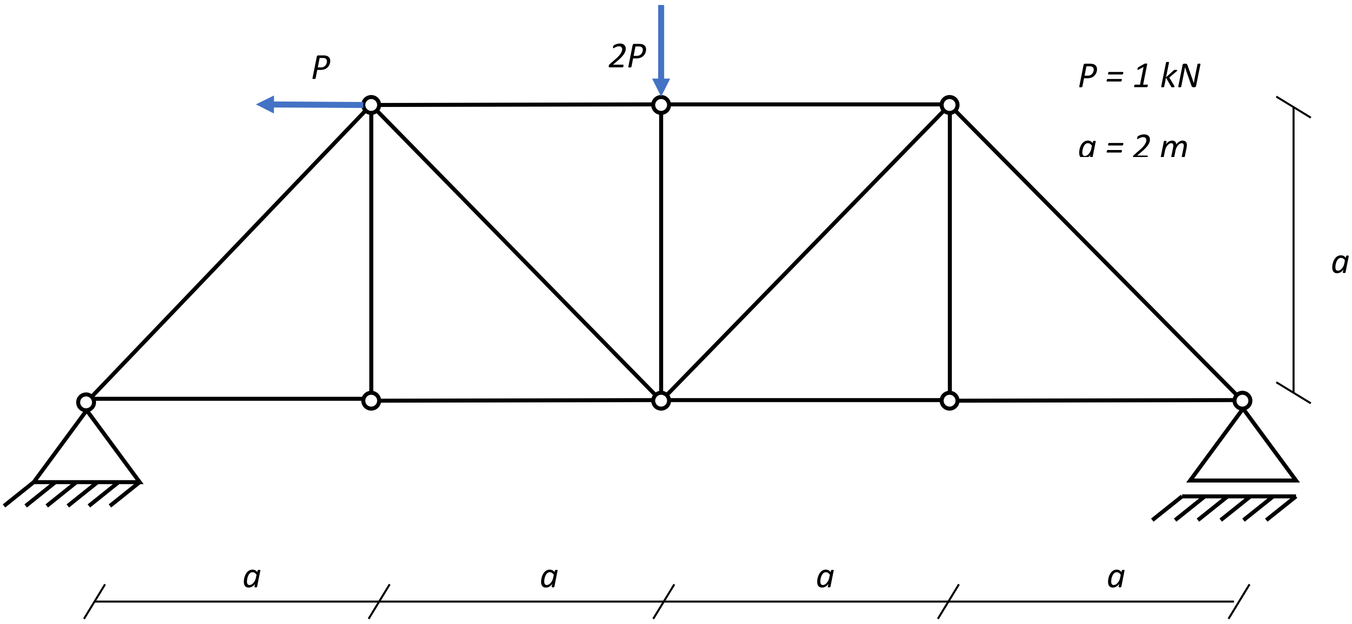
Zad. 1 Wyznacz reakcje oraz siły występujące w prętach. Określ, które pręty są rozciągane, a które ściskane.



P = 100 N

a = 2 m (długość każdego pręta)

Zad. 2 Wyznacz reakcje oraz siły występujące w prętach. Określ, które pręty są rozciągane, a które ściskane.



Zad. 3 Wyznacz reakcje oraz siły występujące w prętach. Określ, które pręty są rozciągane, a które ściskane.