Mechanika analityczna

Nieswobodny układ punktów materialnych $M_j \ (j = 1 \ldots N)$

Prawo Newtona

$$m_j \mathbf{p}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{N}_j \quad (j = 1 \ldots N)$$

$\mathbf{F}_j$ -- wypadkowa wszystkich sił czynnych, działających na punkt M_j

$\mathbf{N}_j$ -- wypadkowa wszystkich sił biernych (reakcji więzów) działających na punkt M_j

Klasyfikacja więzów

$$M_j \sim M_j\left(x_j, y_j, z_j\right)\,(j=1...N)$$

$$f_\kappa\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, ..., \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t\right) = 0 \quad (\kappa = 1...k),$$
$$f_\kappa\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, ..., \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t\right) \le 0 \quad (\kappa = 1...k),$$
$$f_\kappa\left(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_N, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, ..., \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t\right) \ge 0 \quad (\kappa = 1...k)$$

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t\right) = 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k),$$
$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t\right) \le 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k),$$
$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t\right) \ge 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k).$$

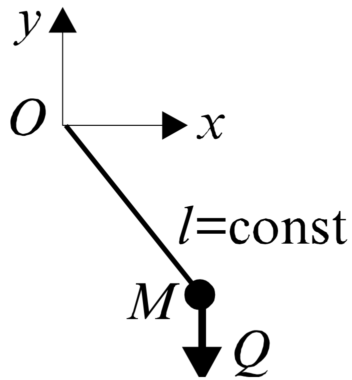
Klasyfikacja więzów

Więzy **skleronomiczne** – niezależne od czasu

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j\right) = 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k),$$

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j\right) \le 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k),$$

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j\right) \ge 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k).$$



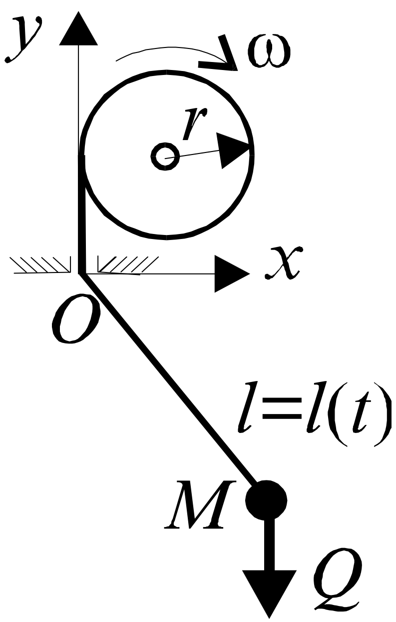
Przykład. Wahadło matematyczne, zawieszone na nieważkim pręcie o długości l.

$$f\left(x, y\right) \equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0 \quad (l = \text{const})$$

Wahadło matematyczne

Klasyfikacja więzów

Więzy **reonomiczne** – zależne jawnie od czasu



Przykład. Wahadło matematyczne, zawieszone jest na nici, której długość jest pewną funkcją czasu. Nić przepuszczona przez otwór w punkcie *O* jest nawijana na walec o promieniu *r* obracający się z jednostajną prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$.

$$l = l_0 - r\omega t$$

$$f\left(x, y, t\right) \equiv x^2 + y^2 - \left(l_0 - r\omega t\right)^2 = 0$$

Klasyfikacja więzów

Więzy **holonomiczne** lub **geometryczne** – niezależne od prędkości

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, t\right) = 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k),$$

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, t\right) \leq 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k),$$

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, t\right) \geq 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k).$$

Więzy **holonomiczne - reonomiczne**

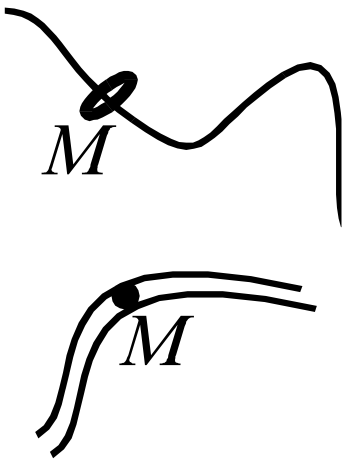
$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j\right) = 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k),$$

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j\right) \leq 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k),$$

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j\right) \geq 0 \quad (j = 1...N, \kappa = 1...k).$$

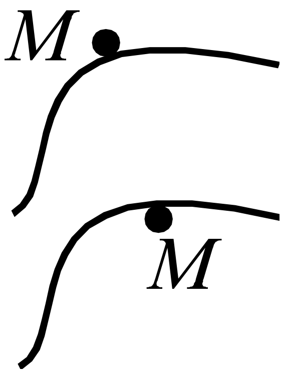
Więzy **holonomiczne - skleronomiczne**

Klasyfikacja więzów



Więzy **dwustronne**

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t\right) = 0 \quad (j = 1\ldots N, \kappa = 1\ldots k)$$



Więzy **jednostronne**

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t\right) \le 0 \quad (j = 1\ldots N, \kappa = 1\ldots k),$$

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t\right) \ge 0 \quad (j = 1\ldots N, \kappa = 1\ldots k).$$

Przesunięcia rzeczywiste i przygotowane

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

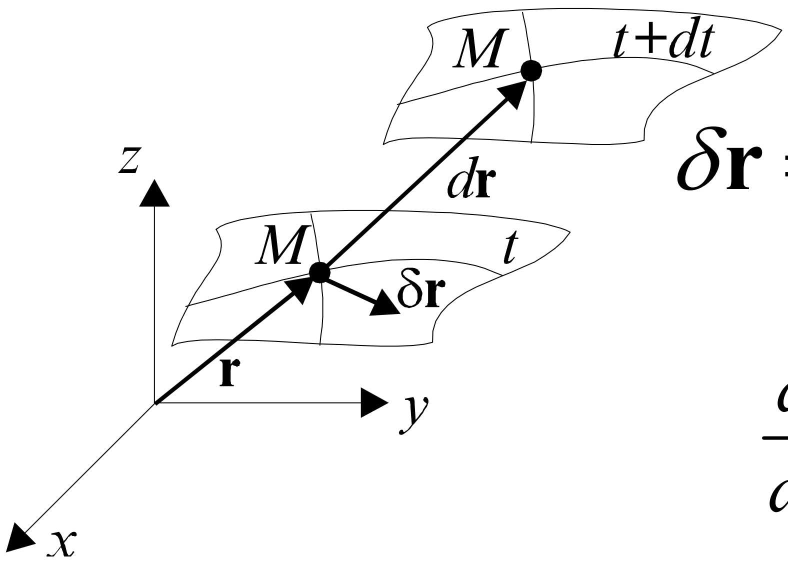
Opis ruchu punktu materialnego

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$$

$$dx = \dot{x}dt,\ dy = \dot{y}dt,\ dz = \dot{z}dt$$

Przesuniecie –elementarne - rzeczywiste

Przesunięcia rzeczywiste i przygotowane



$$\delta \mathbf{r} = \left(\delta x, \delta y, \delta z \right) = \mathbf{i}\delta x + \mathbf{j}\delta y + \mathbf{k}\delta z$$

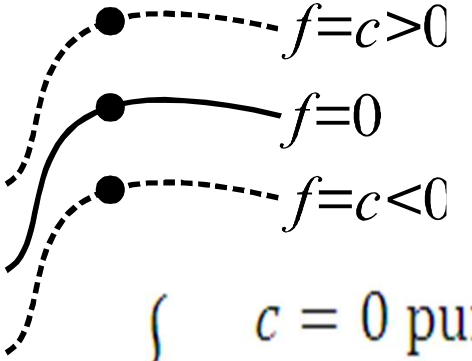
$$\frac{d}{dt}\left(\delta x \right) = \delta \frac{dx}{dt}, \qquad \int_{t_0}^{t} \left(\delta x \right) dt = \delta \int_{t_0}^{t} x dt.$$

Przesunięcie przygotowane (wirtualne, możliwe).

Definicja. Dowolne elementarne (nieskończenie małe) przesunięcie, zgodne z więzami.

Inna postać definicji. Przemieszczeniem przygotowanym nazywamy nieskończenie małe przemieszczenie proporcjonalne do prędkości możliwej układu zgodnej z nałożonymi na układ więzami.

Więzy holonomiczne

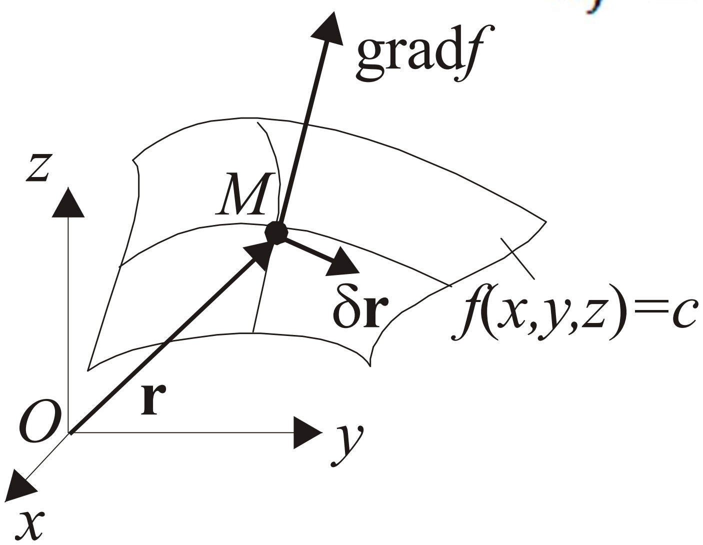


$$f(x, y, z, t) = c$$

$$\begin{cases} c = 0 \text{ punkt nie może opuscić powierzchni więzów} \\ c < 0 \text{ lub } c > 0 \text{ punkt może opuścić powierzchnię więzów} \end{cases}$$

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = \delta c$$

$$df \equiv \operatorname{grad} f \circ d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t}dt = \delta c$$



$$\operatorname{grad} f \equiv \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Stopnie swobody

Układ punktów materialnych $M_j \sim M_j(x_j, y_j, z_j)$, $j=1,\ldots N$.

Więzy geometryczne

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, t\right)=0 \quad \left(\kappa=1\ldots k,\quad j=1\ldots N\right)$$

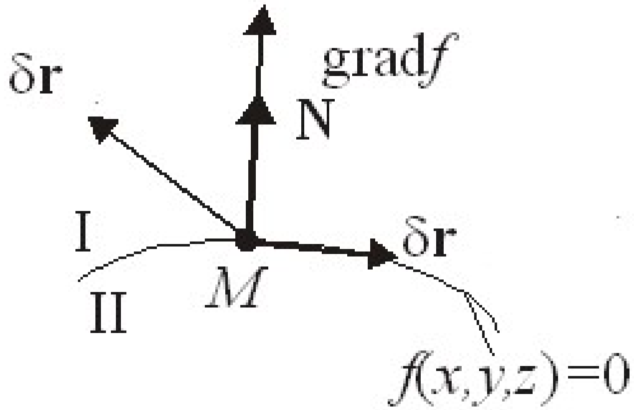
Więzy kinematyczne

$$\sum_{j=1}^{N}\left(a_{\rho j}dx_j+b_{\rho j}dy_j+c_{\rho j}dz_j+\right)+a_\rho dt=0 \quad \left(\rho=1\ldots r\right)$$

Stopnie swobody – liczba niezależnych współrzędnych 3N-k-r

Ogólne równanie dynamiki

Zasada więzów idealnych, doskonałych (bez tarcia)

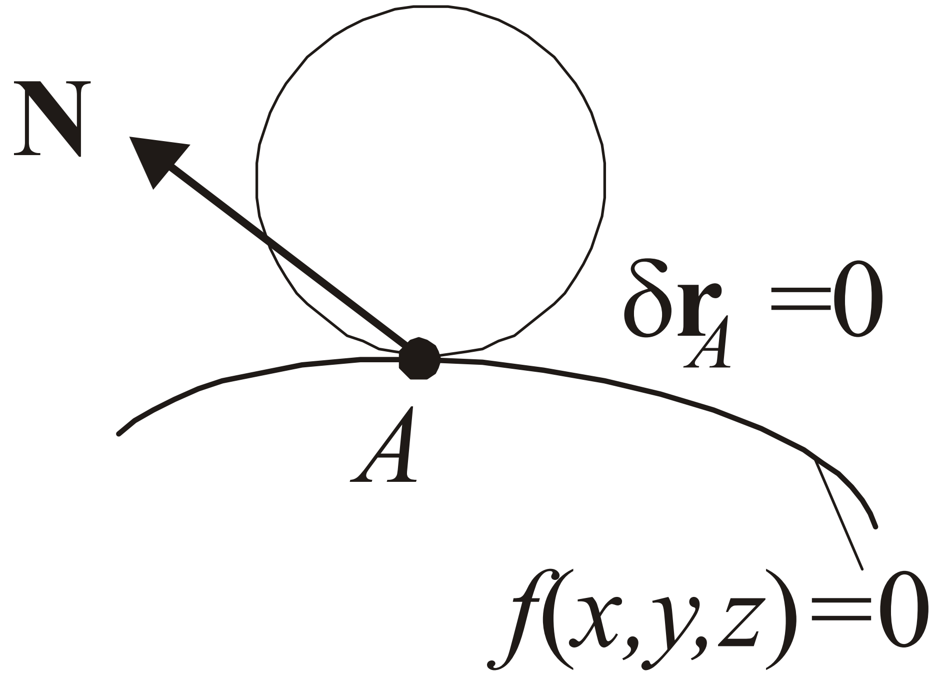


$$\forall \delta \boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{N} \circ \delta \boldsymbol{r} = 0$$

Układ N punktów materialnych

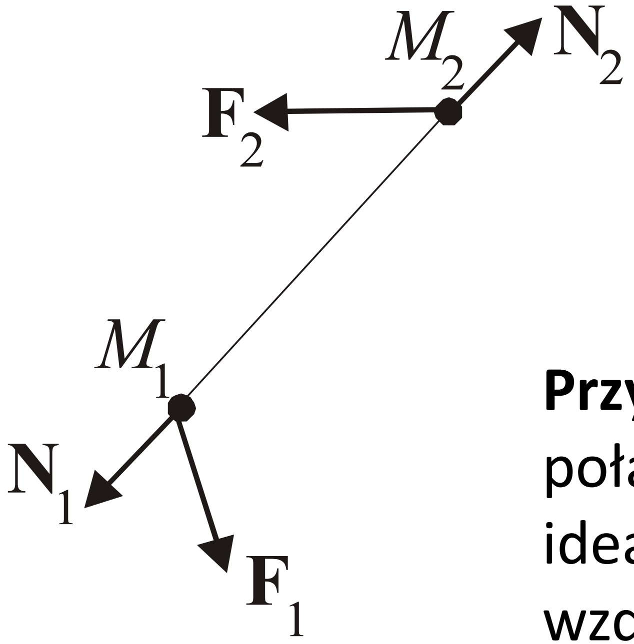
$$\forall \delta \boldsymbol{r}_j \quad \boldsymbol{N}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j = 0 \quad j = 1, \dots, N$$

Ogólne równanie dynamiki



Przykład 1. Ciało toczy się bez poślizgu. W tym przypadku więzy są idealne ponieważ punkt kontaktu ciała z powierzchnią jest chwilowo nieruchomy. To znaczy, że przemieszczenie przygotowane tego punktu $\delta \boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{0}$ i wtedy dla każdej reakcji $\boldsymbol{N}$ iloczyn skalarny $\boldsymbol{N} \circ \delta \boldsymbol{r}_A = 0$.

Ogólne równanie dynamiki



Przykład 2. Dwa punkty materialne M_1 i M_2 połączone są sztywnym prętem (więzy idealne). Reakcje $\boldsymbol{N}_1$ i $\boldsymbol{N}_2$ skierowane są wzdłuż pręta i są one siłami wewnętrznymi dla rozpatrywanego układu dwóch punktów. Praca sił wewnętrznych, działających na ciało doskonale sztywne jest równa zeru. Stąd $\boldsymbol{N_1}\circ\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{N_2}\circ\delta\boldsymbol{r}_2=0$.

Zasada prac przygotowanych (przemieszczeń przygotowanych Lagrange'a)

Praca przygotowana(wirtualna) - praca siły $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$ na przemieszczeniu przygotowanym $\delta \boldsymbol{r}$ punktu przyłożenia tej siły.

$$\delta W = \boldsymbol{F} \circ \delta \boldsymbol{r} = F \delta r \cos(\boldsymbol{F}, \delta \boldsymbol{r}) = F_x \, \delta x + F_y \, \delta y + F_z \, \delta z$$

lub

$$\delta W = M \, \delta \varphi$$

w przypadku ruchu obrotowego

Zasada prac przygotowanych (przemieszczeń przygotowanych Lagrange'a)

Na układ punktów materialnych $M_j \sim M_j(x_j, y_j, z_j)$, $j=1,\ldots N$ działają siły $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N$

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N} \delta W_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j = \sum_{j=1}^{N} F_j \delta r_j \cos\left(\boldsymbol{F}_j, \delta \boldsymbol{r}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} (F_{jx}\delta x + F_{jy}\delta y + F_{jz}\delta z)$$

Układ jest w równowadze gdy $\mathbf{F}_j + \mathbf{N}_j = 0 \; (j = 1 \ldots N)$

$$\boldsymbol{F}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{N}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j = 0$$

Zasada prac przygotowanych (przemieszczeń przygotowanych Lagrange'a)

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{N}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j = 0$$

Ogólna postać zasady prac przygotowanych: warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu punktów materialnych jest to, aby suma prac przygotowanych wszystkich działających na układ sił **czynnych i biernych** przy dowolnym przemieszczeniu przygotowanym układu była równa zeru.

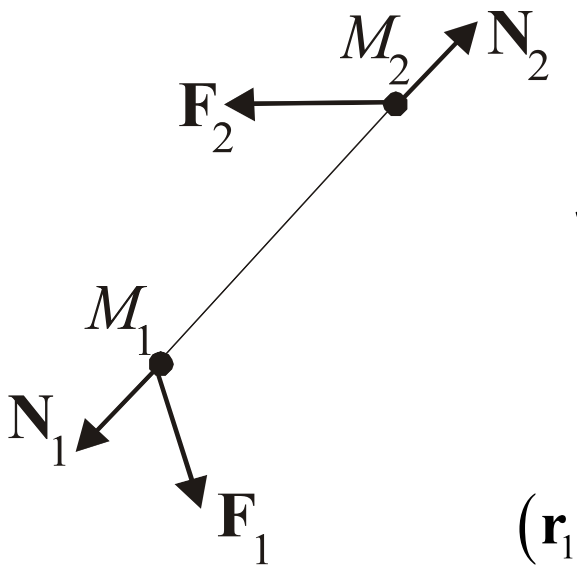
Zasada prac przygotowanych (przemieszczeń przygotowanych Lagrange'a)

Więzy idealne

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j = 0$$

Zasada prac przygotowanych: Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu punktów materialnych z ***geometrycznymi (skleronomicznymi) więzami idealnymi*** jest to, qby suma prac przygotowanych wszystkich działających na układ sił **czynnych** przy dowolnym przemieszczeniu przygotowanym układu była równa zeru.

Zasada prac przygotowanych (przemieszczeń przygotowanych Lagrange'a)



Przykład 2. Dwa punkty materialne M_1 i M_2 połączone są sztywnym prętem (więzy idealne). Reakcje $\boldsymbol{N_1}$ i $\boldsymbol{N_2}$ skierowane są wzdłuż pręta i są one siłami wewnętrznymi dla rozpatrywanego układu dwóch punktów.

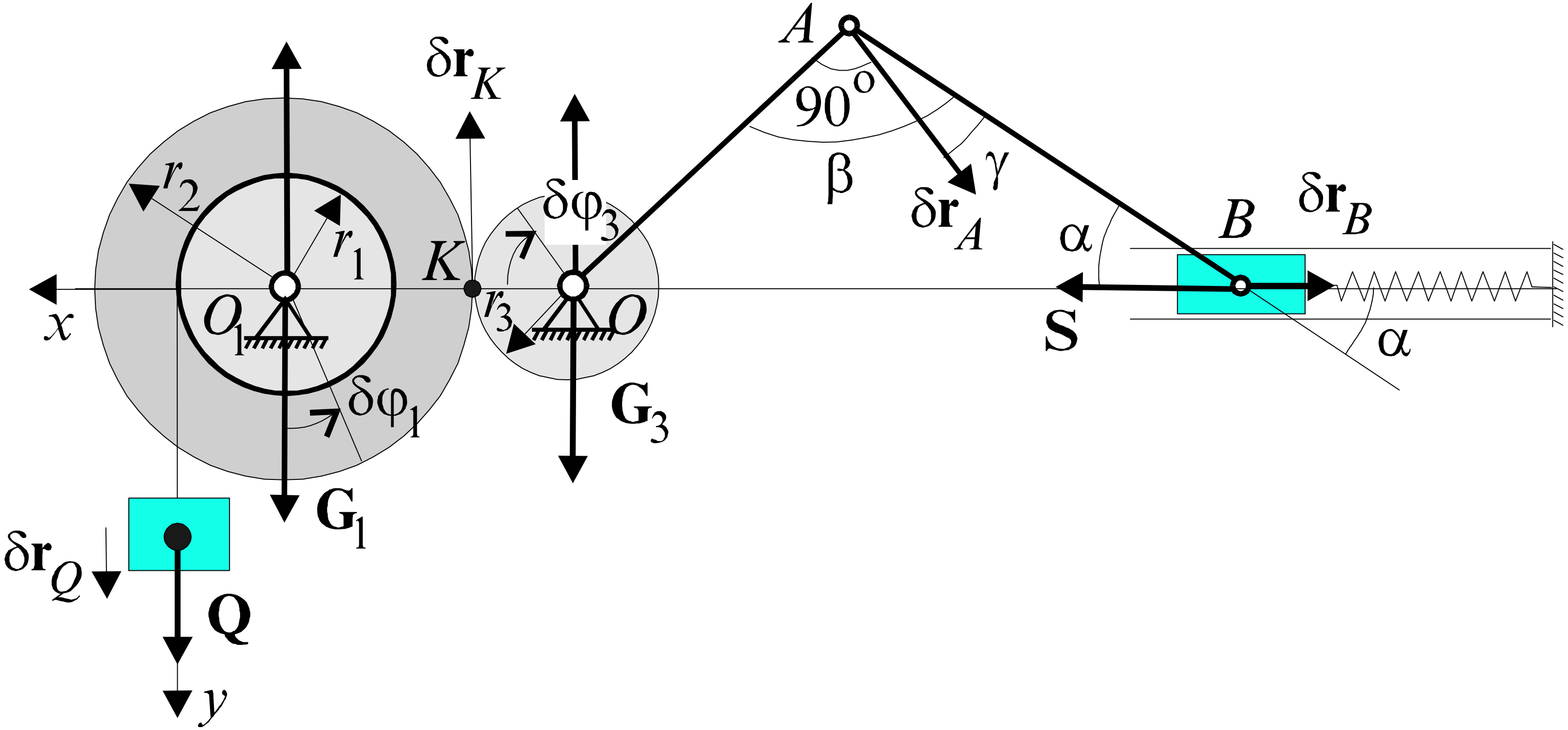
$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = l^2 \;\rightarrow\; 2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0 \;\rightarrow$$

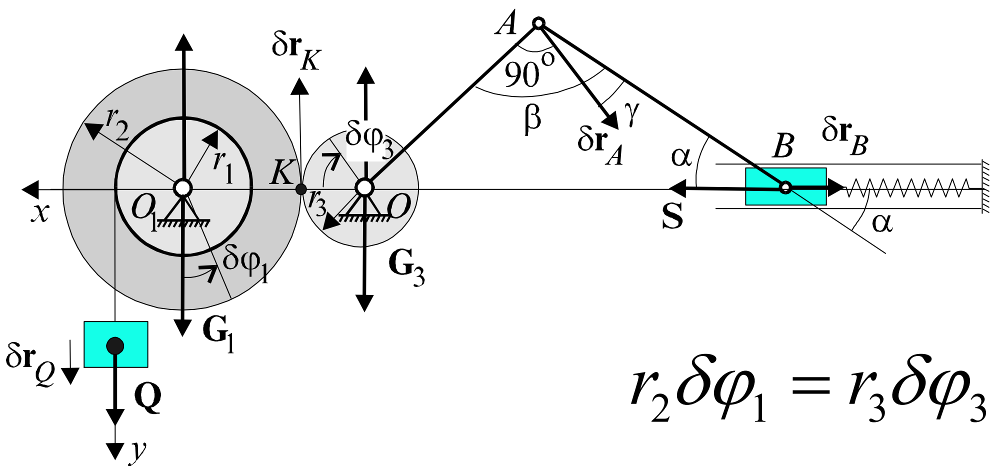
$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) = 0 \;\rightarrow$$

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2) = 0 \;\rightarrow\; (\delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2) = 0.$$

$$\boldsymbol{N}_1 \circ \delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{N}_2 \circ \delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{N}_1 \circ \delta\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{N}_1 \circ \delta\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{N}_1 \circ (\delta\boldsymbol{r}_1 - \delta\boldsymbol{r}_2) = 0$$

Przykład. Wykorzystując zasadę prac przygotowanych wyznaczyć wydłużenie sprężyny.





$$\delta r_Q = r_1 \delta\varphi_1$$

$$\delta r_K = r_2 \delta\varphi_1$$

$$r_2 \delta\varphi_1 = r_3 \delta\varphi_3 \;\rightarrow\; \delta\varphi_3 = r_2 \frac{\delta\varphi_1}{r_3} = r_2 \frac{\delta r_Q}{r_1 r_3}$$

$$\delta r_A = OA \cdot \delta\varphi_3 = OA r_2 \frac{\delta r_Q}{r_1 r_3}$$

$$\delta r_A \cos\gamma = \delta r_B \cos\alpha = \delta r_B \cos\alpha \rightarrow \delta r_B = \delta r_A \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = OA \cdot r_2 \frac{\delta r_Q}{r_1 \cdot r_3} \frac{\cos(\beta - 90^\circ)}{\cos\alpha}$$

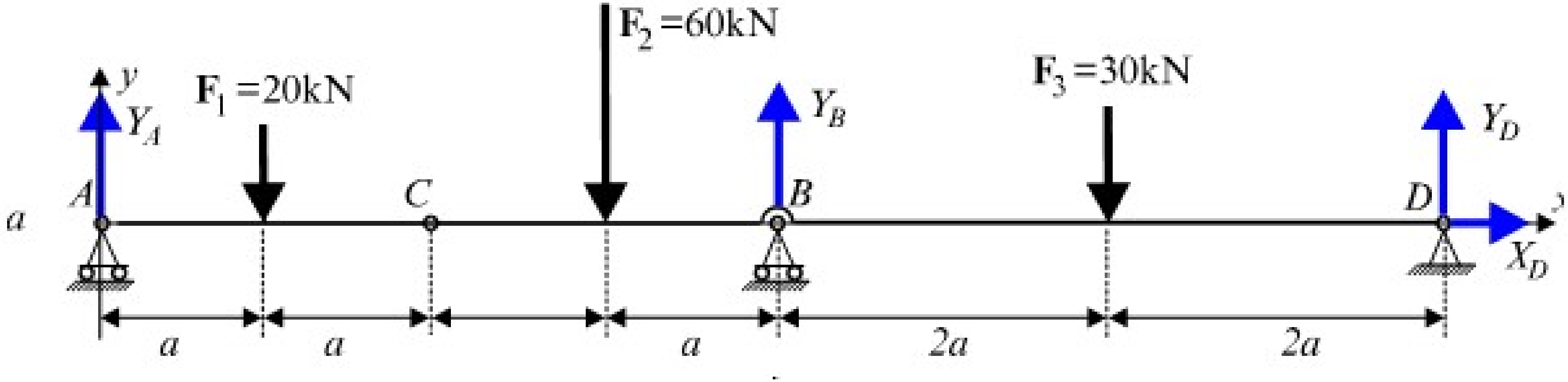
$$\delta W = \mathbf{S} \circ \delta\mathbf{r}_B + \mathbf{Q}\delta\mathbf{r}_Q = -S\delta r_B + Q\delta r_Q = 0$$

$$-S\cdot\delta r_B+Q\cdot\delta r_Q=0\ \rightarrow\ 0=-c\lambda\cdot\delta r_B+Q\cdot\delta r_Q=-c\lambda\cdot OA\cdot r_2\frac{\delta r_Q}{r_1\cdot r_3}\frac{\cos\left(\beta-90^\circ\right)}{\cos\alpha}+Q\cdot\delta r_Q\ \rightarrow$$

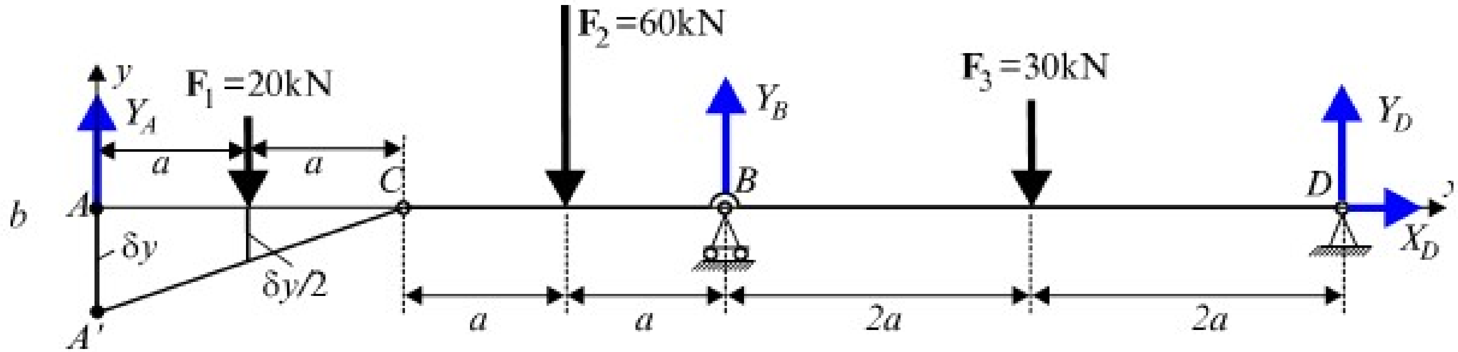
$$-c\lambda\cdot l\cdot r_2\frac{1}{r_1\cdot r_3}\frac{\cos\left(\beta-90^\circ\right)}{\cos\alpha}+Q=0\ \rightarrow$$

$$\lambda=\frac{Qr_1\cdot r_3\cos\alpha}{c\cdot l\cdot r_2\cos\left(\beta-90^\circ\right)}$$

Przegubowa belka , podparta na trzech podporach, składa się z dwóch części połączonych przegubem C. Wyznaczyć reakcje podporowe w punktach A, B i D.



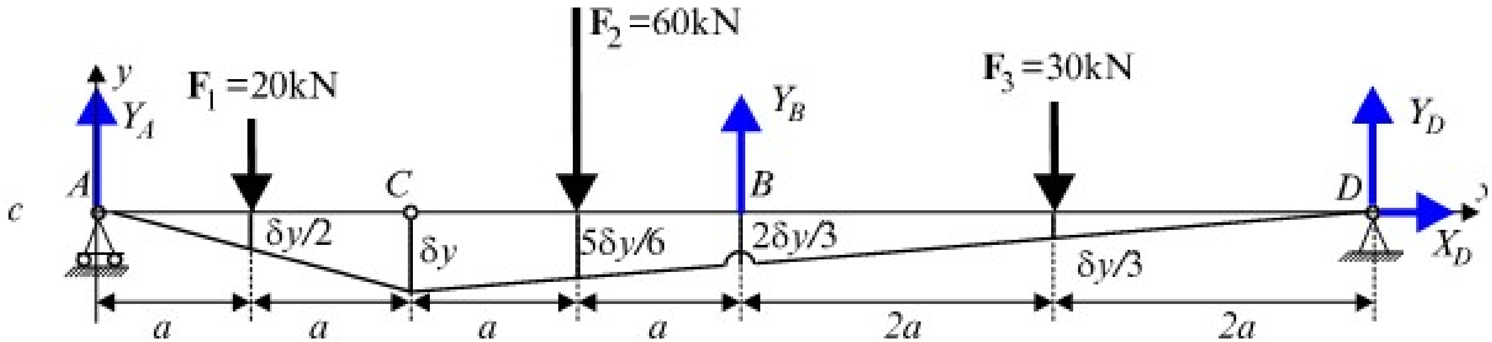
Zastępujemy oddziaływanie podpór reakcjami więzów. Przemieszenia podpór w odpowiednich kierunkach będą przemieszczeniami uogólnionymi. Aby wyznaczyć reakcję Y_A odrzucamy podporę *A*.



$$\delta y_{F_1} = \delta y / 2$$

$$\delta W = \mathbf{F}_\mathrm{A} \circ \delta \mathbf{r}_A + \mathbf{F}_1 \delta \mathbf{r}_Q = -Y_A \delta y + F_1 \delta y / 2 = 0 \Rightarrow Y_A = F_{1/2}$$

Aby wyznaczyć reakcję Y_B odrzucamy podporę B.

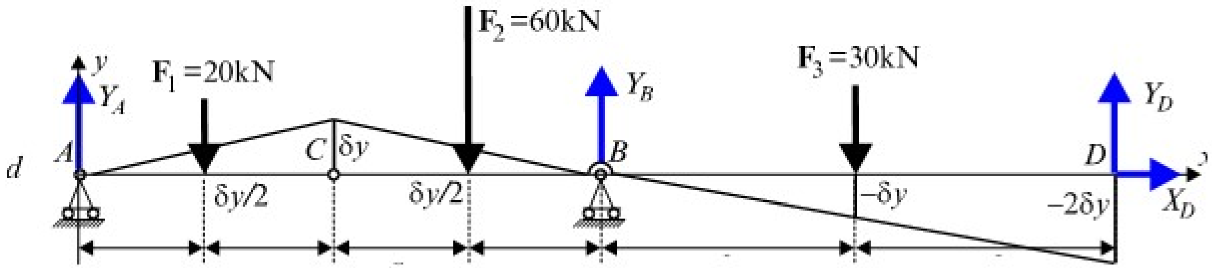


$$\delta y_{F_1} = \delta y / 2 \qquad \delta y_{F_2} = 5\delta y / 6 \qquad \delta y_{F_3} = \delta y / 3$$

$$0 = \mathbf{R}_B \cdot \delta \mathbf{r}_B + \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_2} + \mathbf{F}_3 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_3} = -Y_B \cdot 2\delta y/3 + F_1 \cdot \delta y/2 + F_2 \cdot 5\delta y/6 + F_3 \cdot \delta y/3 \rightarrow$$

$$Y_B = \frac{3}{2}\left(\frac{F_1}{2} + \frac{5F_2}{6} + \frac{F_3}{3}\right)$$

Aby wyznaczyć reakcję Y_D odrzucamy podporę *D*.



$$\delta y_{F_1} = \delta y / 2 \qquad \delta y_{F_2} = \delta y / 2 \qquad \delta y_{F_3} = \delta y$$

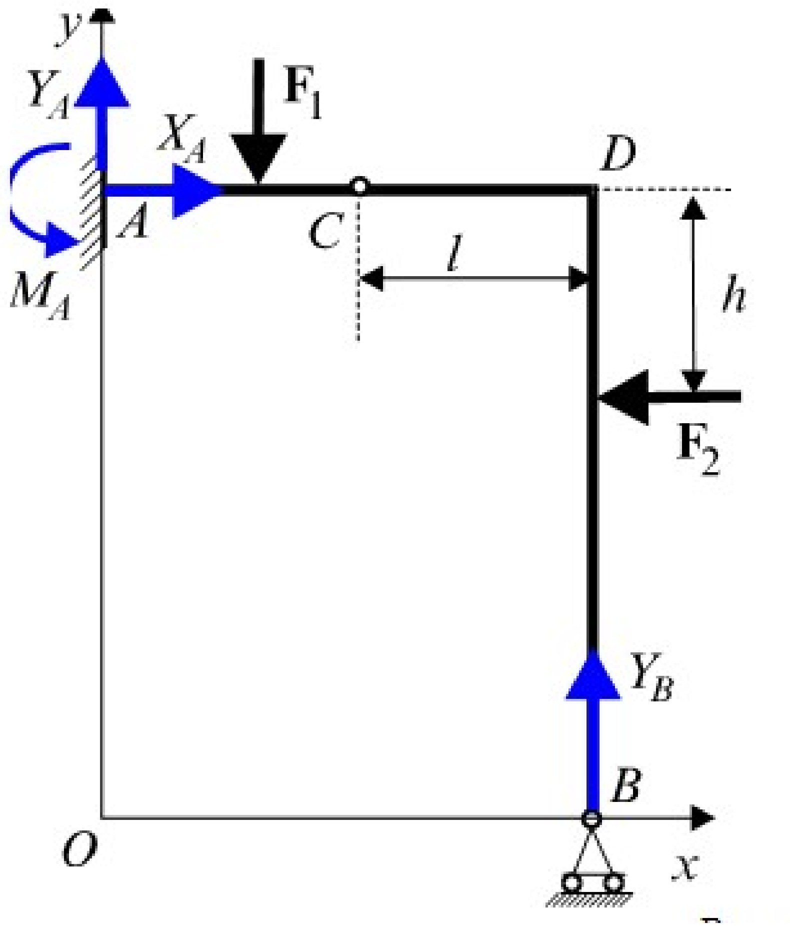
$$0 = \mathbf{R}_D \cdot \delta \mathbf{r}_D + \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_2} + \mathbf{F}_3 \cdot \delta \mathbf{r}_{F_3} = -Y_D \cdot 2\,\delta y - F_1 \cdot \delta y / 2 - F_2 \cdot \delta y / 2 + F_3 \cdot \delta y \ \rightarrow$$

$$Y_D = \frac{1}{2}\left(-\frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{2} + F_3 \right)$$

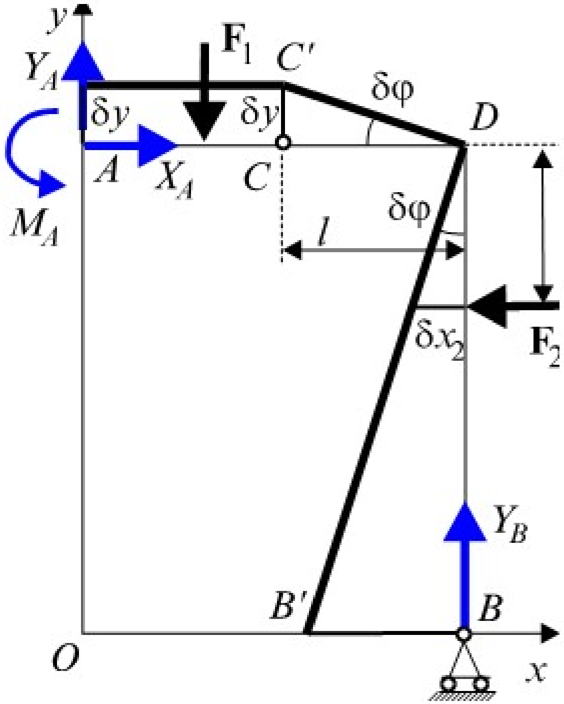
Wyznaczając reakcję X_D odrzucamy podporę i zakładamy, że punkt przemieścił się poziomo o δx. Wszystkie podpory i punkty przyłożenia sił skupionych mają takie same przemieszczenie przygotowane. Ale ponieważ te przemieszczenia są prostopadłe do większości działających sił, to według zasady prac przygotowanych

$$0=\mathbf{Y}_A\cdot\delta\mathbf{r}_A+\mathbf{Y}_B\cdot\delta\mathbf{r}_B+\mathbf{Y}_D\cdot\delta\mathbf{r}_D+\mathbf{F}_1\cdot\delta\mathbf{r}_{F_1}+\mathbf{F}_2\cdot\delta\mathbf{r}_{F_2}+\mathbf{F}_3\cdot\delta\mathbf{r}_{F_3}=0+0+X_D\cdot\delta x+0+0+0\rightarrow X_D=0.$$

Korzystając z zasady prac przygotowanych wyznaczyć reakcje w utwierdzeniu *A* i podporze ruchomej *B*



W utwierdzeniu działają siły X_A ,Y_A oraz moment M_A. Aby wyznaczyć pionową reakcję Y_A uwalniamy ramę w punkcie od więzów w kierunku pionowym i nadajemy jej w tym punkcie przemieszczenie δy do góry. Przegub C również przemieści się o δy do góry do punktu C\`. Punkt $B$ może poruszać się tylko poziomo, więc przemieści się on do punktu $B$\` na odcinku OB.



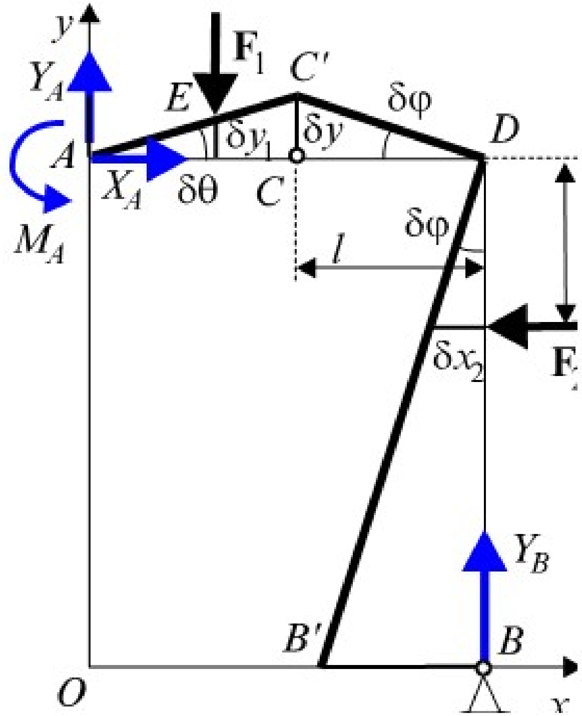
$$\delta y = DC \cdot \delta\varphi \;\rightarrow\; \delta\varphi = \frac{\delta y}{DC} = \frac{\delta y}{l}$$

Siła $\boldsymbol{F}_2$ przemiesza się poziomo o $\delta x_2 = h \cdot \delta\varphi = h\dfrac{\delta y}{l}$

$$0 = Y_A \cdot \delta y + 0 - F_1 \cdot \delta y + F_2 \cdot \delta x_2 = Y_A \cdot \delta y - F_1 \cdot \delta y + F_2 \cdot \delta y \frac{h}{l}$$

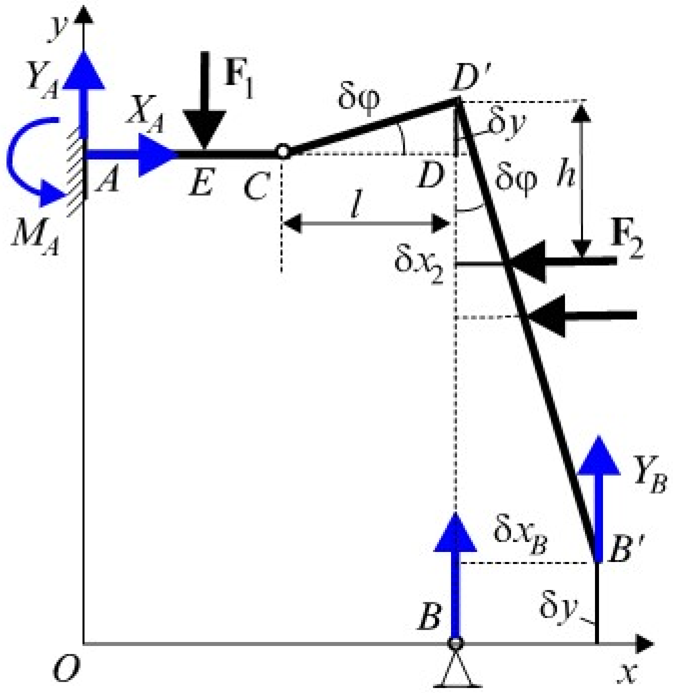
$$Y_A = F_1 - F_2 \frac{h}{l}$$

Do wyznaczenia poziomej reakcji X_A uwalniamy ramę w punkcie *A* od więzów w kierunku poziomym i nadajemy jej w tym punkcie przemieszczenie δx w prawo. Cała konstrukcja (każdy jej punkt) również przemieści się o δx w prawo. Wtedy z zasady prac przygotowanych (obrót w utwierdzeniu jest równy zeru, więc praca przygotowana momentu utwierdzenia też jest równa zeru)



$$0 = X_A \cdot \delta x + 0 - F_2 \cdot \delta x \;\rightarrow\; \underline{X_A = F_2}.$$

Do wyznaczenia pionowej reakcji Y_B uwalniamy ramę w punkcie *B* od więzów w kierunku pionowym i obracamy sztywną część *CDB* względem przegubu *C* o kąt przygotowany $\delta\varphi$. Punkt *D* przemieści się do góry o $\delta y = l\delta\varphi$ do punktu *D'*. Punkt *B* i punkt przyłożenia siły $\boldsymbol{F}_2$ przemieszczają się wraz z punktem *D* oraz obracają się względem *D'* o kąt $\delta\varphi$, znaczy to, że przemieszczają się również do góry o δy oraz w kierunku osi *x* o δx_B i $\delta x_2 = h\delta\varphi$.



$$0 = 0 + Y_B \cdot \delta y + 0 - F_2 \cdot \delta x_2 = Y_B \cdot l\,\delta\varphi - F_2 \cdot h\,\delta\varphi \;\rightarrow\; \underline{Y_B = F_2 \frac{h}{l}}.$$

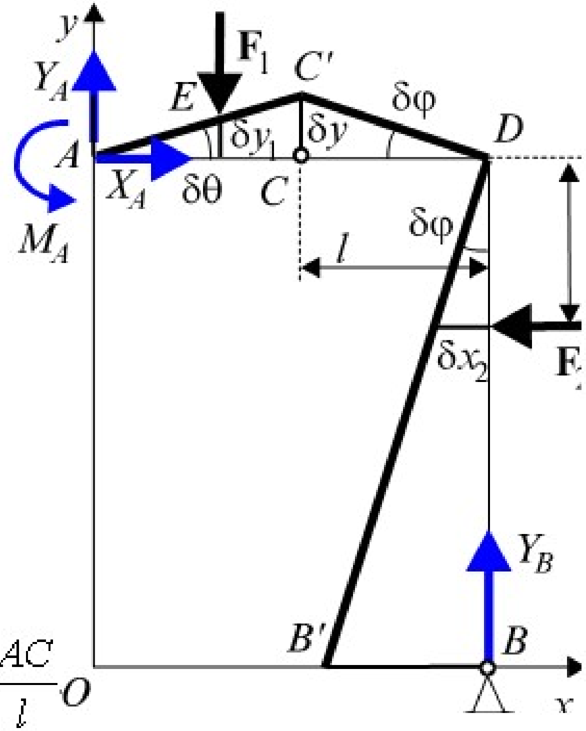
Do wyznaczenia momentu utwierdzenia M_A uwalniamy ramę w punkcie *A* od więzów usztywnienia. Można to sobie wyobrazić tak, że utwierdzenie sztywne zamieniamy na podporę stałą. Obracamy część *AC* względem *A* o kąt przygotowany $\delta\theta$ (przemieszczenie postępowe punktu *A* jest równe zeru). To spowoduje przemieszczenie punktu *E*, w którym przyłożono siłę $\boldsymbol{F_1}$ o $\delta y_1 = AE\delta\theta$ do góry oraz przemieszczenie przegubu *C* o $\delta y = AC\delta\theta$ do góry. Przemieszczenia sztywnej części *CDB* są takie, jak w przypadku obliczania reakcji Y_A:

kąt obrotu $\delta\varphi$ względem środka *D*

$$\delta y = l \cdot \delta\varphi \;\rightarrow\; \delta\varphi = \frac{\delta y}{l} = \frac{AC \cdot \delta\theta}{l}$$

poziome przemieszenie siły $\boldsymbol{F}_2$ $\quad \delta x_2 = h \cdot \delta\varphi = h\dfrac{AC \cdot \delta\theta}{l}$

pionowe przemieszczenie punktu *B* jest równe zeru



$$0 = M_A\delta\theta + 0 + 0 - F_1 \cdot \delta y_1 + F_2 \cdot \delta x_2 =$$

$$= M_A\delta\theta - F_1 \cdot AE \cdot \delta\theta + F_2 \cdot h\frac{AC \cdot \delta\theta}{l} \;\rightarrow\; \underline{M_A = F_1 \cdot AE - F_2 \cdot h\frac{AC}{l}}$$

Ogólne równanie dynamiki (zasada d'Alemberta-Lagrange'a)

Na układ punktów materialnych $M_j \sim M_j(x_j, y_j, z_j)$, $j=1,\ldots N$ nałożono więzy idealne

$$m_j \mathbf{p}_j = \mathbf{F}_j + \mathbf{N}_j \quad (j = 1 \ldots N)$$

lub z zasady d'Alemberta

$$\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{p}_j + \mathbf{N}_j = 0 \quad (j = 1 \ldots N) \qquad \text{lub} \qquad \mathbf{F}_j + \mathbf{B}_j + \mathbf{N}_j = 0 \quad (j = 1 \ldots N)$$

Każdemu punktowi M_j nadajemy przemieszczenie przygotowane $\delta \boldsymbol{r}_j$. Mnożąc każde z równań przez $\delta \boldsymbol{r}_j$ i dodając stronami wszystkie otrzymane równania, otrzymujemy zależność

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{p}_j + \mathbf{N}_j \right) \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0 \qquad \text{lub} \qquad \sum_{j=1}^{N} \left(\mathbf{F}_j + \mathbf{B}_j + \mathbf{N}_j \right) \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0$$

Ogólne równanie dynamiki (zasada d'Alemberta-Lagrange'a)

$$\forall\, \delta \mathbf{r}_j \quad \sum_{j=1}^{N} \left(\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{p}_j \right) \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left[\left(F_{jx} - m_j \ddot{x}_j \right) \cdot \delta x_j + \left(F_{jy} - m_j \ddot{y}_j \right) \cdot \delta y_j + \left(F_{jz} - m_j \ddot{z}_j \right) \cdot \delta z_j \right] = 0$$

Współrzędne uogólnione i siły uogólnione

Układ *N* punktów o *s* stopniach swobody

Współrzędne uogólnione

$$q_1, q_2, \ldots, q_s$$

Prędkości i przyspieszenia uogólnione

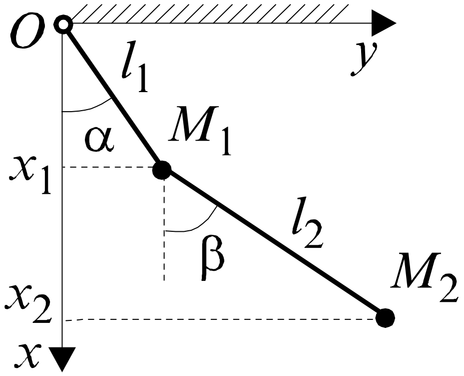
$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, \qquad \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_s$$

$$x_\nu = x_\nu\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right) \quad (\nu = 1 \ldots 3N)$$

$$\left(x_j = x_j\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right),\; y_j = y_j\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right),\; z_j = z_j\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right) \quad (j = 1 \ldots N)\right).$$

Współrzędne uogólnione i siły uogólnione

Przykład. Dla podwójnego wahadła matematycznego układem równań więzów będą 4 równania



$$z_1 = 0,\;\; z_2 = 0,\;\; x_1^2 + y_1^2 = l_1^2,\;\; \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 = l_2^2$$

Układ ma 2 stopnie swobody. Jako współrzędne uogólnione można przyjąć kąty (α, β), (x_1, x_2), (α, x_2), oraz (β, x_1). Układem równań więzów dla tego układu będzie

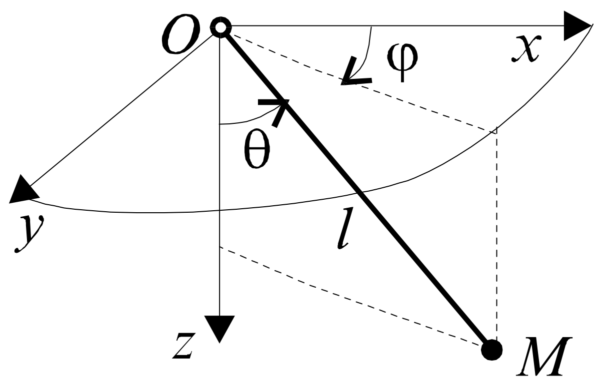
$$x_1 = l_1 \sin\alpha = l_1 \sin q_1$$

$$y_1 = l_1 \cos\alpha = l_1 \cos q_1$$

$$x_2 = l_1 \sin\alpha + l_2 \sin\beta = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2$$

$$y_2 = l_1 \cos\alpha + l_2 \cos\beta = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2$$

Współrzędne uogólnione i siły uogólnione



Przykład. Położenie wahadła sferycznego o długości l można określić za pomocą dwóch kątów:

$$q_1 = \theta, q_2 = \varphi$$

Równanie więzów

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

$$x = l \sin\theta \cos\varphi = l \sin q_1 \cos q_2,$$

$$y = l \sin\theta \sin\varphi = l \sin q_1 \sin q_2,$$

$$z = l \cos\theta = l \cos q_1.$$

Siły uogólnione

$$x_\nu = x_\nu\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right) \quad (\nu = 1...3N)$$

$$\left(x_j = x_j\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right),\ y_j = y_j\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right),\ z_j = z_j\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right) \quad (j = 1...N)\right.$$

Różniczka zupełna każdej współrzędnej uogólnionej

$$dx_\nu = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} dt$$

Wariacja każdej współrzędnej uogólnionej

$$\delta x_\nu = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i + \cancel{\frac{\partial x_\nu}{\partial t} \delta t}$$

Praca przygotowana

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j = \sum_{j=1}^{N} F_{jx}\delta x_j + F_{jy}\delta y_j + F_{jz}\delta z_j = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \delta x_\nu$$

$$\delta W = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \delta x_\nu = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\right)}_{Q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i$$

Siły uogólnione

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n}\left(F_{jx}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy}\frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz}\frac{\partial z_j}{\partial q_i}\right) = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \quad (i = 1 \ldots s)$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i$$

1. Układowi PM nadajemy przemieszczenie przygotowane $\delta q_p \neq 0$, a pozostałe wariacje δq_i są równe zeru.
2. Uwzględniając nałożone więzy wyznaczamy odpowiednie wariacje (przemieszczenia przygotowane) współrzędnych prostokątnych.

$$\delta x_j^p, \delta y_j^p, \delta z_j^p \quad (j = 1 ... N) \text{ lub } \delta x_\nu^p \quad (\nu = 1 ... 3N)$$

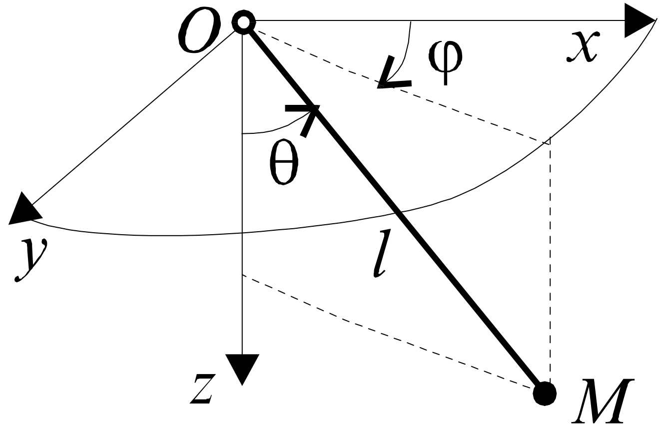
3. Wykorzystując wzór

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \circ \delta \boldsymbol{r}_j = \sum_{j=1}^{N} F_{jx} \delta x_j + F_{jy} \delta y_j + F_{jz} \delta z_j = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \delta x_\nu$$

obliczamy odpowiednią siłę uogólnioną

$$Q_p = \frac{\delta' W^p}{\delta q_p} = \frac{\sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \delta x_j^p}{\delta q_p}$$

Przykład. Znaleźć siły uogólnione dla wahadła sferycznego o długości zakładając, że współrzędnymi uogólnionymi są $q_1=\theta$, $q_2=\varphi$.



Sposób 1.

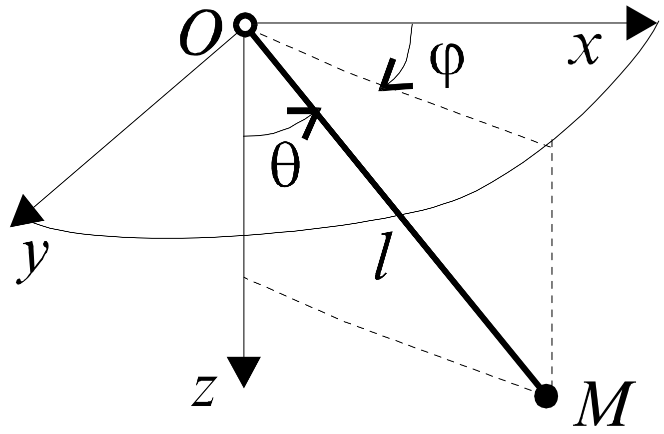
$$Q_1 = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \theta} = G \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

$$Q_2 = F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} = F_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi} = G \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

$$x = l \sin\theta \cos\varphi, \;\; y = l \sin\theta \sin\varphi, \;\; z = l \cos\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -l \sin\theta, \;\; \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \;\Rightarrow\; Q_1 = G \frac{\partial z}{\partial \theta} = -Gl \sin\theta, \;\; Q_2 = G \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

Sposób 2.



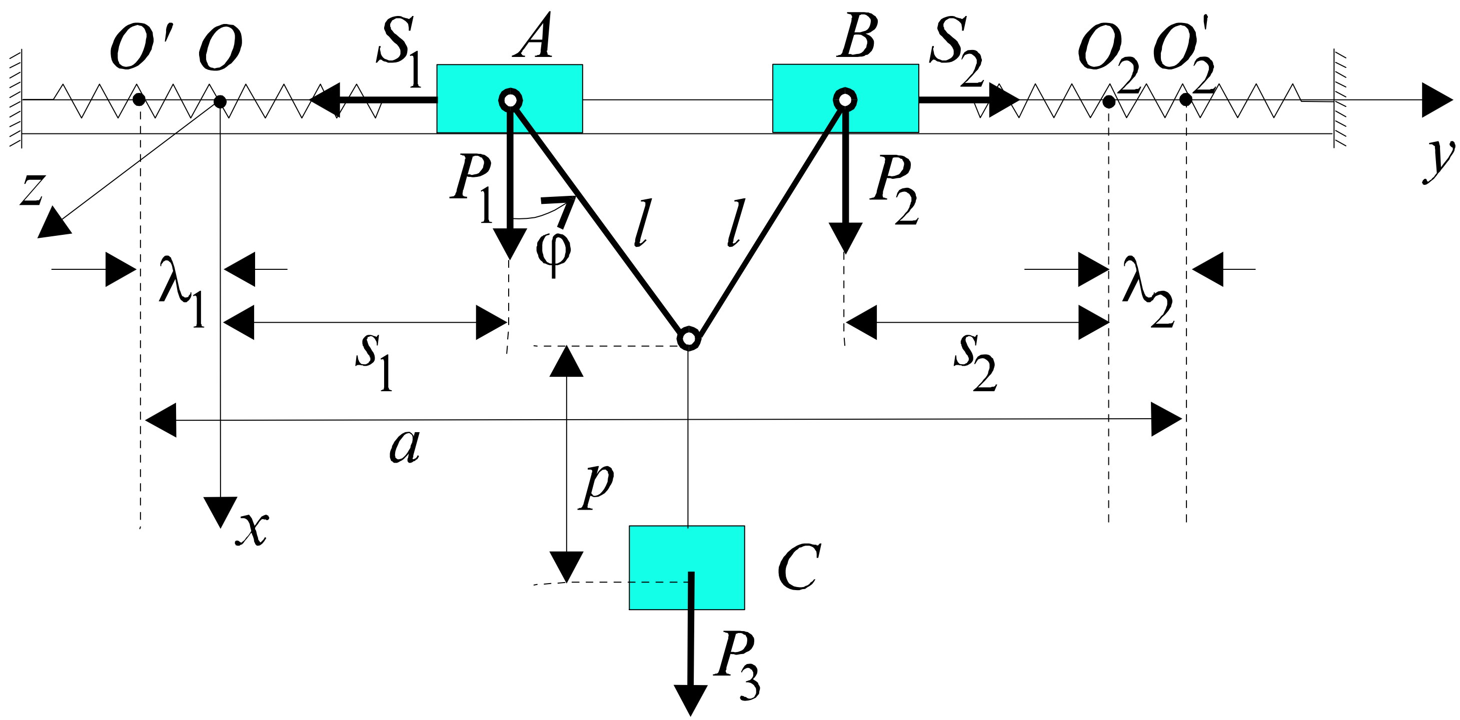
$$\delta W = \boldsymbol{F} \circ \delta \boldsymbol{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = G \delta z$$

$$dz = l \frac{d\left(\cos\theta\right)}{d\theta} d\theta = -l \sin\theta \, d\theta \;\rightarrow\; \delta z = -l \sin\theta \, \delta\theta$$

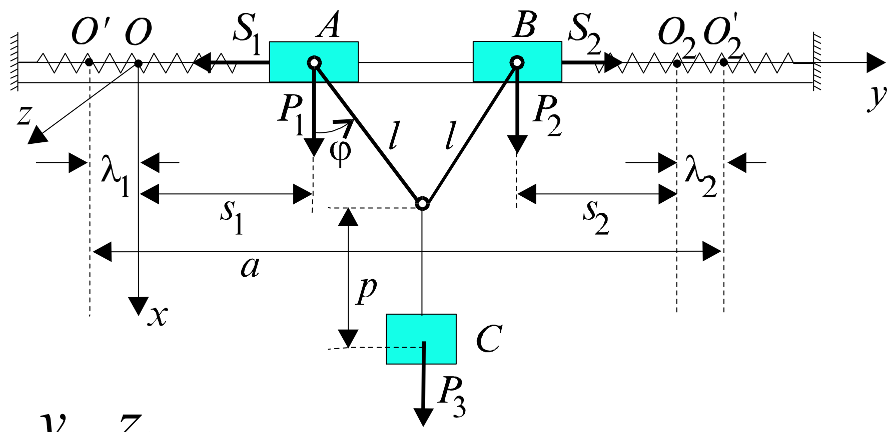
$$\delta W = G \delta z = -Gl \sin\theta \delta\theta$$

$$Q_1 = -Gl \sin\theta, \;\; Q_2 = 0$$

Przykład. Znaleźć siły uogólnione dla układu mechanicznego przedstawionego na rysunku. Siły ciężkości działające na masy *A,B,C* są odpowiednio P_1, P_2, P_3 .Masy *A* i *B* poruszają się po gładkiej poziomej płaszczyźnie. Dwa nieważkie pręty o jednakowej długości *l* połączone są między sobą i z masami *A* i *B* doskonałymi przegubami walcowymi. Sztywności sprężyn zamocowanych do ścian i ciał *A* i *B* są równe c_1 *i* c_2 . Odległość pomiędzy przegubem połączenia prętów i ciałem *C* jest równa *p* , a odległość między ciałami *A* i *B* *a* , przy założeniu, że sprężyny nie są rozciągnięte.



Środek układu współrzędnych *O* umieszczamy w położeniu równowagi statycznej ciała *A*. Współrzędne punktów *A, B, C* oznaczymy przez $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$

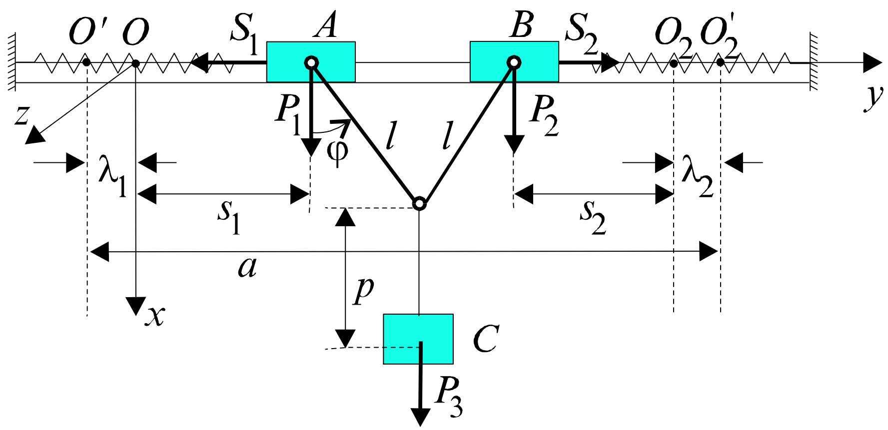


Równania więzów

$$x_1 = 0, x_2 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0,$$

$$\left[\left(x_3 - p\right) - x_1\right]^2 + \left(y_3 - y_1\right)^2 + \left(z_3 - z_1\right)^2 - l^2 = 0,$$

$$\left[\left(x_3 - p\right) - x_2\right]^2 + \left(y_3 - y_2\right)^2 + \left(z_3 - z_2\right)^2 - l^2 = 0.$$



Współrzędne uogólnione

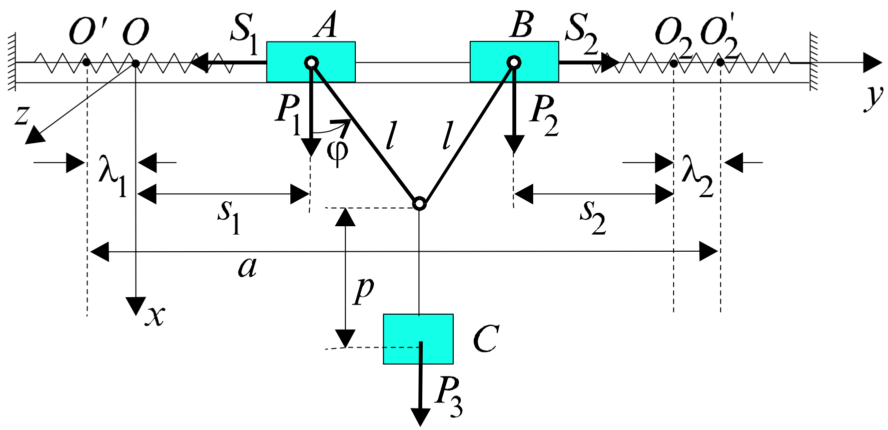
$$q_1 = s_1, \qquad q_2 = \varphi$$

Siły działające na układ

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{S}_1, \mathbf{F}_2 = \mathbf{P}_2 + \mathbf{S}_2, \mathbf{F}_3 = \mathbf{P}_3$$

Rzuty sił na osie

$$F_{1x} = P_1,\ F_{2x} = P_2,\ F_{3x} = P_3,$$
$$F_{1y} = -c_1\left(s_1 + \lambda_1\right),\ F_{2y} = c_2\left(s_2 + \lambda_2\right) = c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right),\ F_{3y} = 0,$$
$$F_{1z} = 0,\ F_{2z} = 0,\ F_{3z} = 0,$$

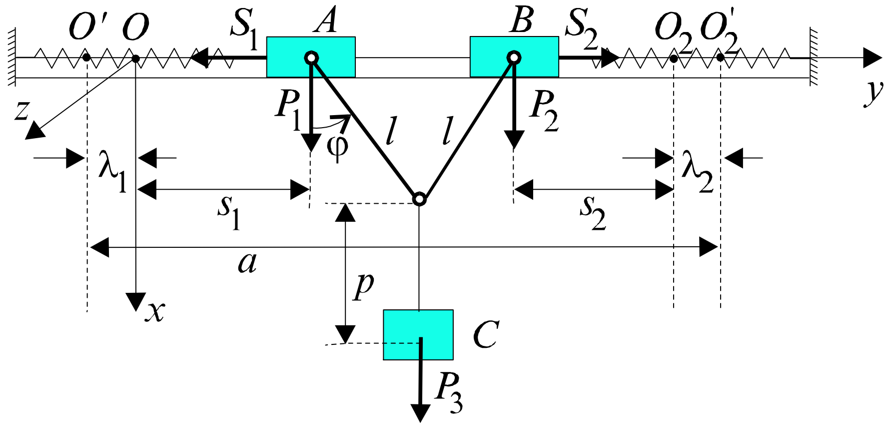


$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = l\cos\varphi + p,$$

$$y_1 = s_1, \quad y_2 = s_1 + 2l\sin\varphi, \quad y_3 = s_1 + l\sin\varphi.$$

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta x_2 = 0, \quad \delta x_3 = -l\sin\varphi\delta\varphi,$$

$$\delta y_1 = \delta s_1, \quad \delta y_2 = \delta s_1 + 2l\cos\varphi\delta\varphi, \quad \delta y_3 = \delta s_1 + l\cos\varphi\delta\varphi.$$



Praca przygotowana

$$\delta W = F_{1y}\delta y_1 + F_{2y}\delta y_2 + F_{3x}\delta x_3 =$$

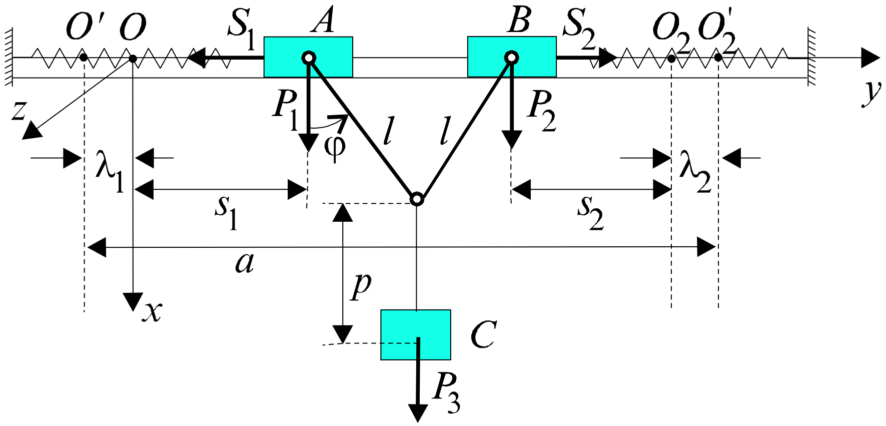
$$-c_1\left(s_1+\lambda_1\right)\delta s_1 + c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)\left(\delta s_1 + 2l\cos\varphi\delta\varphi\right) + P_3\left(-l\sin\varphi\delta\varphi\right) =$$

$$= \left[-c_1\left(s_1+\lambda_1\right) + c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)\right]\delta s_1 + \left[c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)2l\cos\varphi - P_3 l\sin\right.$$

$$\Downarrow$$

$$Q_1 = -c_1\left(s_1+\lambda_1\right) + c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right),$$

$$Q_2 = c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)2l\cos\varphi - P_3 l\sin\varphi.$$



Drugi sposób

$$\delta s_1 \neq 0, \delta\varphi = 0$$

$$\delta x_1^1 = \delta x_2^1 = \delta x_3^1 = 0, \;\; \delta y_1^1 = \delta y_2^1 = \delta y_3^1 = \delta s_1$$

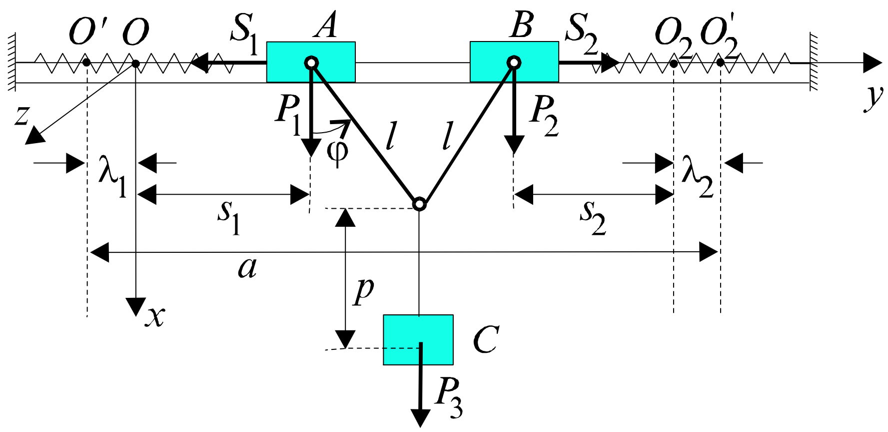
$$\delta W^1 = F_{1y}\delta y_1 + F_{2y}\delta y_2 + F_{3x}\delta x_3 = -c_1\left(s_1+\lambda_1\right)\delta s_1 + c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)\delta s_1 =$$

$$= \left[-c_1\left(s_1+\lambda_1\right) + c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)\right]\delta s_1.$$

$$\Downarrow$$

$$Q_1 = \frac{\delta W^1}{\delta q_1} = \frac{\delta W^1}{\delta s_1} = -c_1\left(s_1+\lambda_1\right) + c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)$$

$$\delta\varphi \neq 0 \qquad \delta s_1 = 0$$



$$\delta x_1 = \delta x_2 = \delta y_1 = 0,\ \ \delta x_3 = -l\sin\varphi\delta\varphi,\ \ \delta y_2 = 2l\cos\varphi\delta\varphi,\ \ \delta y_3 = l\cos\varphi\delta\varphi.$$

$$\delta W^2 = F_{1y}\delta y_1 + F_{2y}\delta y_2 + F_{3x}\delta x_3 = c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)2l\cos\varphi\delta\varphi + P_3\left(-l\sin\varphi\delta\varphi\right) =$$

$$= \left[c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)2l\cos\varphi - P_3 l\sin\varphi\right]\delta\varphi.$$

$$\Downarrow$$

$$Q_1 = \frac{\delta W^2}{\delta q_2} = \frac{\delta W^2}{\delta\varphi} = c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\cos\varphi\right)2l\cos\varphi - P_3 l\sin\varphi.$$

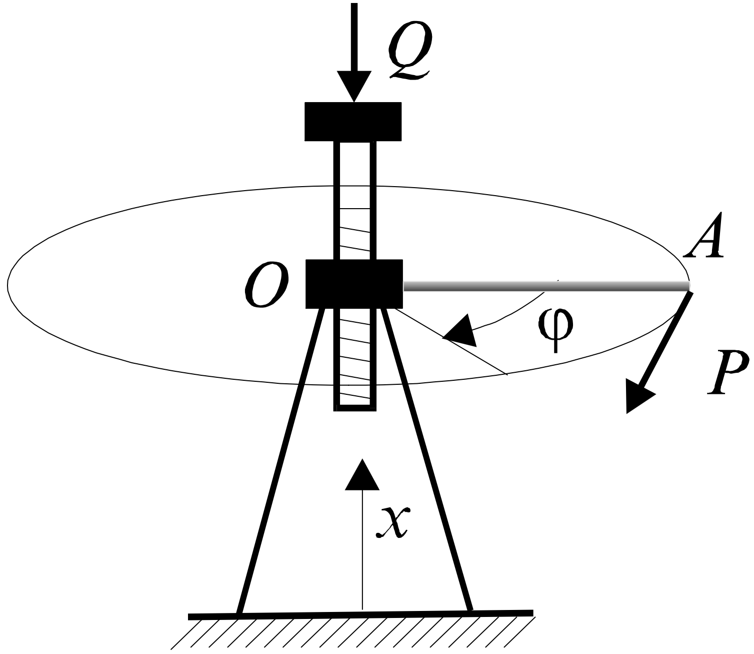
Zasada prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych

Jeżeli na układ PM nałożone są idealne więzy holonomiczno-skleronomiczne (ograniczające przemieszczenia i niezależne jawnie od czasu) to warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi działających na układ *N* sił $\boldsymbol{F}_j$ jest aby suma prac na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych punktów przyłożenia sił była równa zeru.

$$\delta W \equiv \sum_{j=1}^{s} Q_i \delta q_i = 0$$

Ponieważ przemieszczenia przygotowane są niezależne, to

$$Q_i \equiv \sum_{j=1}^{n} \left(F_{jx} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right) \equiv \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots s)$$



Przykład. Podnośnik z korbą *OA* podnosi ciężar ***Q*** . Do końca korby przyłożona jest siła ***P***. Obliczyć ciężar ***Q***, jeżeli skok śruby podnośnika wynosi *h*.

Współrzędna uogólniona

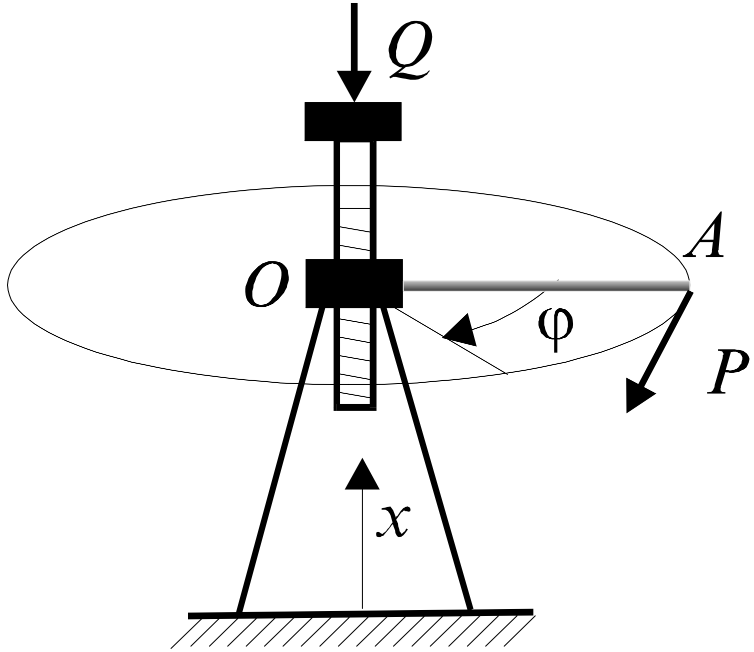
$$q_1 = \varphi$$

Zasada prac przygotowanych

$$Pr\delta\varphi - Q\delta x = 0$$

Wyprowadzamy zależność między $\delta\varphi$ i δx. Obrót *OA* o kąt $\varphi = 2\pi$ (jeden skok) wywołuje podnoszenie o x=h. Stąd

$$\frac{\varphi}{2\pi} = 1,\ \frac{x}{h} = 1 \ \rightarrow \ \frac{x}{h} = \frac{\varphi}{2\pi},\ x = \varphi\frac{h}{2\pi} \ \rightarrow \ \delta x = \delta\varphi\frac{h}{2\pi}.$$



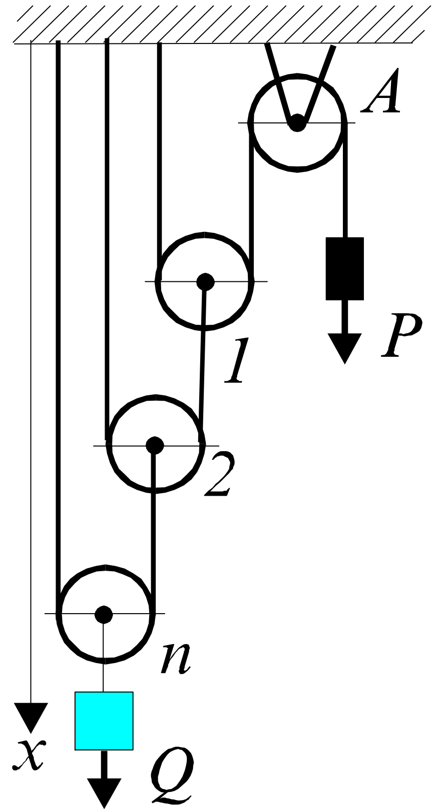
Z zasady prac przygotowanych

$$Pr\delta\varphi - Q\delta\varphi\frac{h}{2\pi} = 0, \ \left(Pr - Q\frac{h}{2\pi}\right)\delta\varphi = 0 \ \rightarrow \ Pr - Q\frac{h}{2\pi} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Q = P\frac{2\pi r}{h}$$

Przykład. Wielokrążek składa się z nieruchomego krążka *A* i *n* ruchomych krążków. Wyznaczyć, w przypadku równowagi, zależność między ciężarem ***Q*** a siłą ***P*** przyłożoną do końca liny zwisającej z nieruchomego krążka

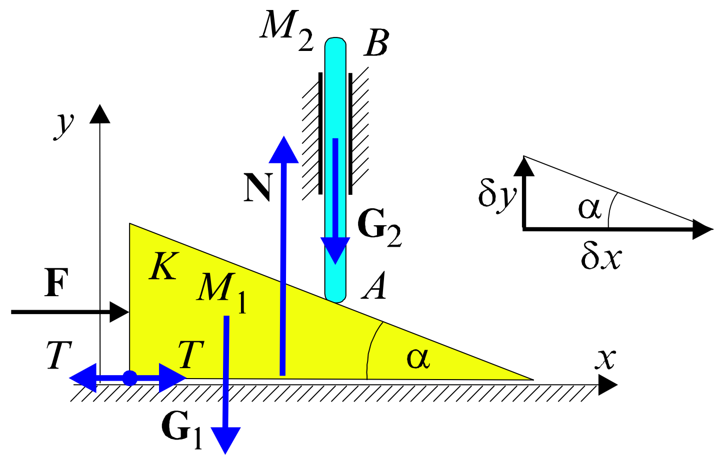


Układ ma jeden stopień swobody, ponieważ jego stan jest jednoznacznie wyznaczony przemieszczeniem *x* siły ***P***. Oznaczymy przemieszenie przygotowane środka krążka *k*przez δx_k.

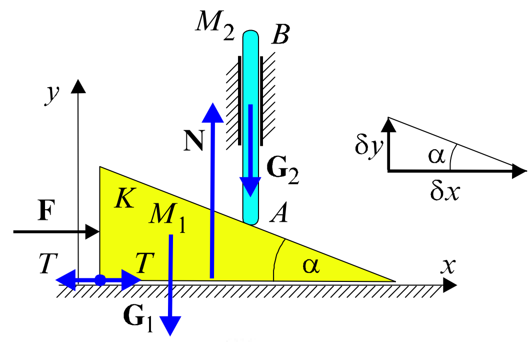
Po przemieszczeniu przygotowanym δxpunktu przyłożenia siły ***P***linka na krążku 1 skróci się o δx i dlatego środek krążka przemieści się o $\delta x_1 = -\frac{\delta x}{2}$. Koniec linki na krążku 2 uniesie się do góry o δx_1. Dlatego środek tego krążka uniesie się do góry o połowę tej wartości $\delta x_2 = \frac{\delta x_1}{2} = -\frac{\delta x}{2^2}$. Podobnie dla krążka 3. $\delta x_k = -\frac{\delta x}{2^k}$.

$$P\delta x + Q\delta x_n = 0 \;\rightarrow\; P\delta x - Q\frac{\delta x}{2^n} = 0 \;\rightarrow\; \left(P - \frac{Q}{2^n}\right)\delta x = 0 \;\rightarrow\; \frac{Q}{P} = 2^n$$

Przykład. Nieruchomy klin *K* o masie M_1 leży na gładkiej poziomej płaszczyźnie, podtrzymując pionowy pręt *AB* o masie M_2**.** Układ pod działaniem siły ***F***, przyłożonej do klina *K* poziomo jest w spoczynku. Wyznaczyć



1. wartość bezwzględną siły ***F*** gdy pochyła powierzchnia klina tworzy z poziomem kąt α;
2. zakres wartości siły ***F***, gdy pozioma płaszczyzna nie jest gładka i współczynnik tarcia między nią a klinem jest równy μ.



Na układ mechaniczny działają siły:
siła ciężkości klina $\mathbf{G}_1$ $(G_1 = M_1 g)$;
siła ciężkości pręta $\mathbf{G}_2$ $(G_2 = M_2 g)$;
siła reakcji poziomej płaszczyzny $\mathbf{N} = -\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$ $(N = G_1 + G_2)$;
siła tarcia $\mathbf{T}$, skierowana przeciwnie do kierunku możliwego ruchu - w przypadku niegładkiej powierzchni.

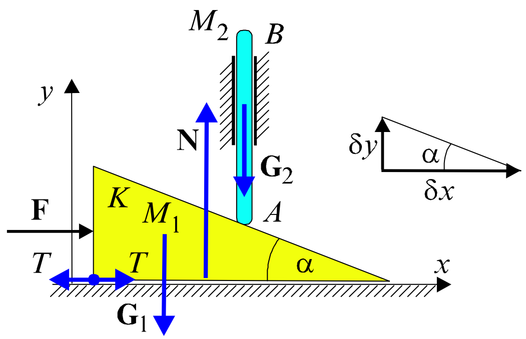
Jeśli przesunąć klin w kierunku poziomym wzdłuż osi Ox o δx, to pręt podniesie się do góry o δy, przy czym δy zależy od δx: $\delta y = \delta x \cdot \mathrm{tg}\alpha$.

W przypadku gładkiej powierzchni praca przygotowana sił działających na układ będzie równa

$$\delta W = F \cdot \delta x - G_2 \cdot \delta y = F \cdot \delta x - M_2 g \cdot \delta x \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

$$\delta W = 0 \;\rightarrow\; F \cdot \delta x - M_2 g \cdot \delta x \cdot \mathrm{tg}\alpha = 0 \;\rightarrow\; F - M_2 g \cdot \mathrm{tg}\alpha = 0 \;\rightarrow\; \underline{F = M_2 g \cdot \mathrm{tg}\alpha}$$

W przypadku niegładkiej powierzchni są dwie możliwości:



1. siła ***F*** jest dostatecznie duża i siła tarcia nie pozwala klinowi przesunąć się do przodu. Wtedy siła tarcia ***T*** ma przeciwny zwrot do siły ***F*** i stan równowagi granicznej jest osiągnięty wtedy, gdy siła tarcia osiąga swą największą wartość *T=μN*

Praca przygotowana sił działających na układ będzie równa

$$\delta W = F\cdot\delta x - T\cdot\delta x - G_2\cdot\delta y = F\cdot\delta x - N\mu\cdot\delta x - M_2 g\cdot\delta x\cdot \mathrm{tg}\alpha;$$

$$\delta W = 0 \;\rightarrow\; F\cdot\delta x - \left(G_1+G_2\right)\mu\cdot\delta x - M_2 g\cdot\delta x\cdot\mathrm{tg}\alpha = 0 \;\rightarrow\; F_{\max} = \left(G_1+G_2\right)\mu + M_2 g\cdot\mathrm{tg}\alpha.$$

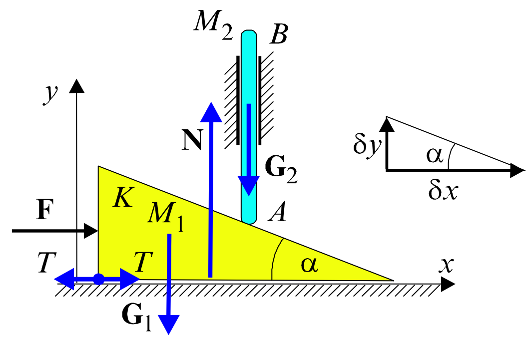
2. siła ***F*** jest dostatecznie mała i siła tarcia nie pozwala klinowi poruszać się do tyłu. Wtedy siła tarcia ***T*** ma zwrot siły ***F*** i stan równowagi granicznej jest osiągnięty wtedy, gdy siła tarcia również osiąga swą największą wartość *T=μN*

Praca przygotowana sił działających na układ wtedy będzie równa

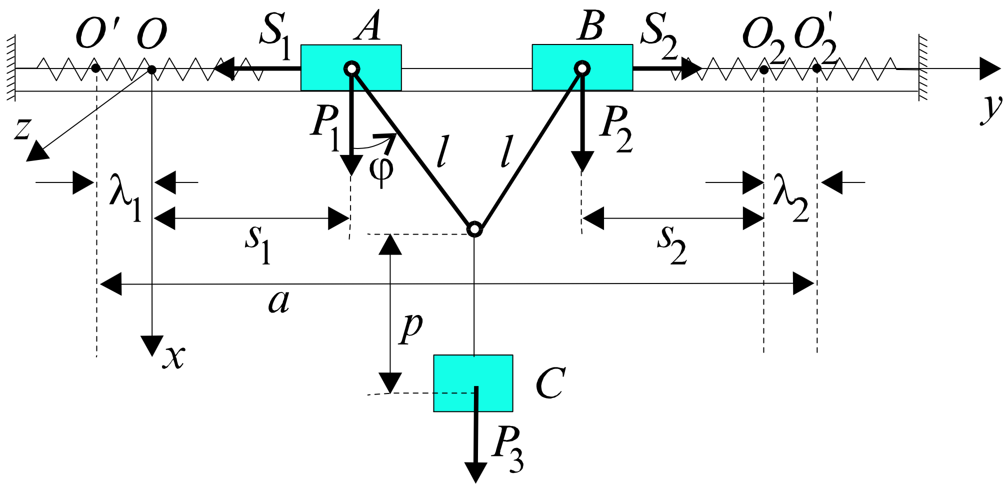
$$\delta W = F\cdot\delta x + T\cdot\delta x - G_2\cdot\delta y = F\cdot\delta x + N\mu\cdot\delta x - M_2 g\cdot\delta x\cdot\mathrm{tg}\alpha;$$

$$\delta W = 0 \;\rightarrow\; F\cdot\delta x + \left(G_1+G_2\right)\mu\cdot\delta x - M_2 g\cdot\delta x\cdot\mathrm{tg}\alpha = 0 \;\rightarrow\; F_{\min} = -\left(G_1+G_2\right)\mu + M_2 g\cdot\mathrm{tg}\alpha.$$

Układ będzie w równowadze, gdy



$$F_{\min} \le F \le F_{\max} \;\rightarrow\; M_2 g \cdot \mathrm{tg}\alpha - \left(M_1 + M_2\right) g\mu \le F \le M_2 g \cdot \mathrm{tg}\alpha + \left(M_1 + M_2\right) g\mu$$

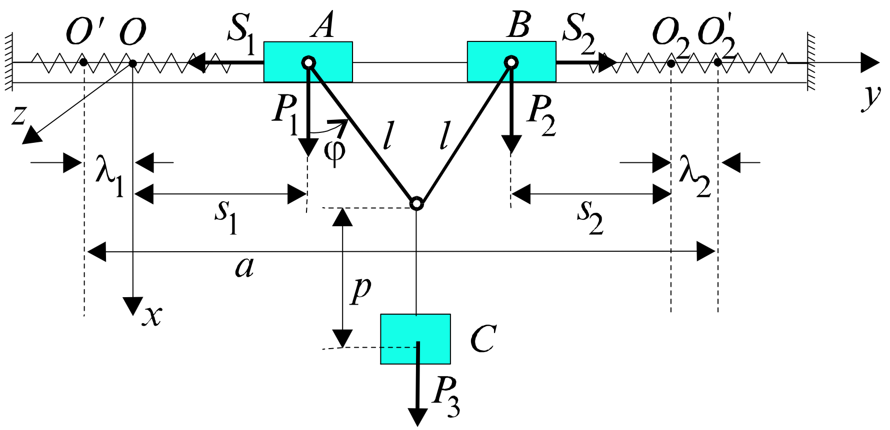


$$q_1 = s_1, \qquad q_2 = \varphi$$

$$Q_1 = -c_1\left(s_1 + \lambda_1\right) + c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\sin\varphi\right),$$

$$Q_2 = c_2\left(a - s_1 - \lambda_1 - 2l\sin\varphi\right)2l\cos\varphi - P_3 l\sin\varphi.$$

Układ mechaniczny jest w równowadze gdy $s_1=0$ a kąt φ ma jeszcze nieznaną pewną wartość $\varphi=\varphi_o$. Z drugiej strony warunkiem równowagi jest $Q_1=0$ i $Q_2=0$. To znaczy



$$-c_1\lambda_1 + c_2\left(a-\lambda_1-2l\sin\varphi_0\right)=0,$$

$$c_2\left(a-\lambda_1-2l\sin\varphi_0\right)2l\cos\varphi_0 - P_3 l\sin\varphi_0 = 0.$$

Z pierwszego równania

$$-c_1\lambda_1 + c_2\left(a-\lambda_1-2l\sin\varphi_0\right)=0 \;\rightarrow\; -c_1\lambda_1 - c_2\lambda_1 + c_2\left(a-2l\sin\varphi_0\right)=0 \;\rightarrow\; \underline{\lambda_1 = \frac{c_2\left(a-2l\sin\varphi_0\right)}{c_1+c_2}}$$

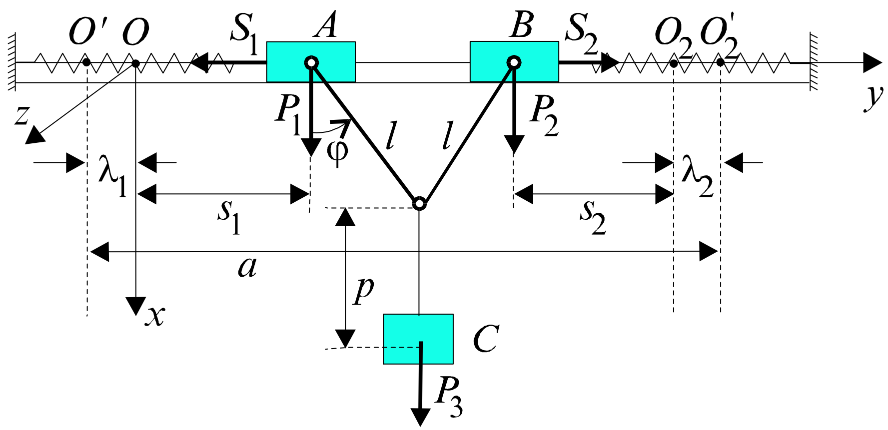
z warunków geometrycznych $$a=\lambda_1+\lambda_2+2l\sin\varphi_0$$

$$\lambda_2 = a-\lambda_1-2l\sin\varphi_0 \;\rightarrow\; \lambda_2 = a-\frac{c_2\left(a-2l\sin\varphi_0\right)}{c_1+c_2}-2l\sin\varphi_0 =$$

$$=\frac{ac_1+\cancel{ac_2}\cancel{-ac_2}+\cancel{2lc_2\sin\varphi_0}-2lc_1\sin\varphi_0\cancel{-2lc_2\sin\varphi_0}}{c_1+c_2}\;\rightarrow$$

$$\underline{\lambda_2=\frac{c_1\left(a-2l\sin\varphi_0\right)}{c_1+c_2}}$$

Z drugiego równania uwzględniając wzór na λ_1 otrzymujemy



$$c_2\left(a-\frac{c_2\left(a-2l\sin\varphi_0\right)}{c_1+c_2}-2l\sin\varphi_0\right)2\cancel{l}\cos\varphi_0-P_3\cancel{l}\sin\varphi_0=0\ \rightarrow$$

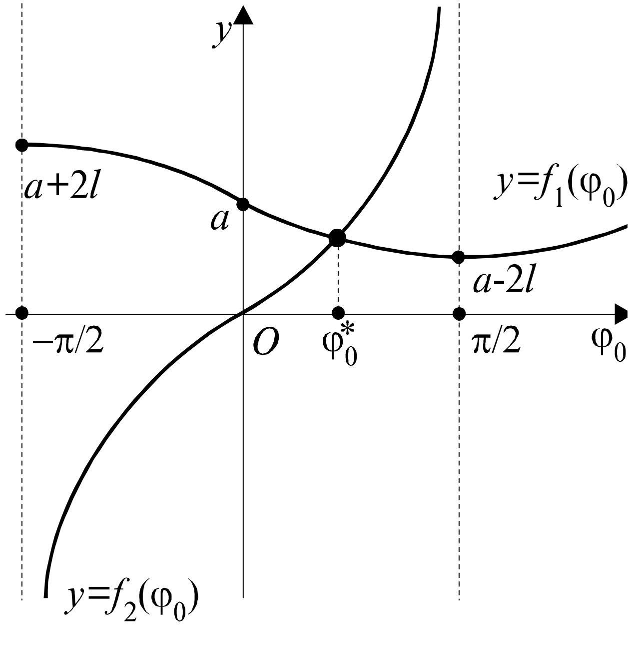
$$c_2\left(c_1a+\cancel{c_2a}-\cancel{c_2a}+\cancel{2lc_2\sin\varphi_0}-\cancel{2lc_2\sin\varphi_0}-2lc_1\sin\varphi_0\right)2\cos\varphi_0-\left(c_1+c_2\right)P_3\sin\varphi_0=0$$

Stąd możemy wyznaczyć kąt $\varphi_0=\varphi_0^*$

$$2c_1c_2\left(a-2l\sin\varphi_0\right)\cos\varphi_0=\left(c_1+c_2\right)P_3\sin\varphi_0.$$ lub $$a-2l\sin\varphi_0=P_3\frac{\left(c_1+c_2\right)}{2c_1c_2}\operatorname{tg}\varphi_0.$$

Aby rozwiązać równanie $$a-2l\sin\varphi_0=P_3\frac{(c_1+c_2)}{2c_1c_2}\operatorname{tg}\varphi_0$$

na płaszczyźnie współrzędnych *φ, y* poprowadzimy dwie krzywe o równaniach



$$y=f_1(\varphi_0)\equiv a-2l\sin\varphi_0;$$

$$y=f_2(\varphi_0)\equiv P_3\frac{(c_1+c_2)}{2c_1c_2}\operatorname{tg}\varphi_0.$$

Na odcinku $\varphi_0\in[-\pi/2;\pi/2]$ istnieje tylko jeden punkt przecięcia a więc istnieje tylko jedno rozwiązanie równania i jedno położenie równowagi statycznej układu mechanicznego.

Gdy $P_3=0$ $\quad (a-2l\sin\varphi_0)\cos\varphi_0=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\varphi_0=0,\\ a-2l\sin\varphi_0=0,\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\varphi_0=0,\\ \sin\varphi_0=\dfrac{a}{2l},\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}1.\ \varphi_0=\dfrac{\pi}{2};\\ 2.\ \varphi_0=\arcsin\dfrac{a}{2l}.\end{array}\right.$

Pierwsze rozwiązanie $\varphi_0=\varphi_{01}\equiv\dfrac{\pi}{2}$ świadczy o tym, że zawsze istnieje położenie równowagi, gdy pręty są poziome.

W przypadku gdy $a>2l$ równanie $\sin\varphi_0=\dfrac{a}{2l}$ nie ma rozwiązania, więc istnieje tylko jedno rozwiązanie φ_{01} (jedno położenie równowagi).

Gdy $a=2l$ równanie $\sin\varphi_0=\dfrac{a}{2l}=1$ ma rozwiązanie $\varphi_0=\varphi_{01}\equiv\dfrac{\pi}{2}$, więc również istnieje tylko jedno rozwiązanie φ_{01} (jedno położenie równowagi).

Gdy $a<2l$ równanie $\sin\varphi_0=\dfrac{a}{2l}$ ma rozwiązanie $\varphi_0=\varphi_{02}=\arcsin\dfrac{a}{2l}\neq\varphi_{01}$,
więc w tym przypadku istnieją dwa rozwiązania φ_{01} i φ_{02} (dwa położenie równowagi).

Równania Lagrange'a

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, t\right) \sim f_\kappa\left(x_\nu, t\right) = 0 \ \left(j = 1...N;\ \kappa = 1..k\right)$$

$$x_\nu = x_\nu\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right) \quad (\nu = 1...3N)$$

$$\left(x_j = x_j\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right),\ y_j = y_j\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right),\ z_j = z_j\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right) \quad (j = 1...N)\right).$$

$$\dot{x}_\nu \equiv \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{dx_\nu\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right)}{dt} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + ... + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial t} + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}.$$

$$\dot{x}_\nu \equiv \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{dx_\nu\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right)}{dt} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial t} + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial x_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}.$$

Prędkość $\dot{x}_\nu$ jest funkcją liniową względem prędkości uogólnionych $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ Różniczkując tę równość względem pochodnej $\dot{q}_i$ otrzymujemy

$$\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\right)=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\right)=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_i \partial t}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_i}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)}_{\dot{x}_\nu}=\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_i}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_i}$$

$$dx_\nu=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial x_\nu}{\partial t}dt \qquad \delta x_\nu=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}\delta q_i+\cancel{\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\delta t}$$

Ogólne równanie dynamiki (zasada d'Alemberta-Lagrange'a)

$$\forall \delta \mathbf{r}_j \quad \sum_{j=1}^{N} \left(\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{p}_j \right) \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left[\left(F_{jx} - m_j \ddot{x}_j \right) \cdot \delta x_j + \left(F_{jy} - m_j \ddot{y}_j \right) \cdot \delta y_j + \left(F_{jz} - m_j \ddot{z}_j \right) \cdot \delta z_j \right] = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \left(X_\nu - m_\nu \ddot{x}_\nu \right) \delta x_\nu = 0$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i$$

$$\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \ddot{x}_\nu \delta x_\nu = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{s} \delta q_i \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \delta q_i \left\{ \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \right) \right\} \overset{(4),(5)}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \delta q_i \left\{ \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_i} \right\} = \sum_{i=1}^{s} \delta q_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} \right\}.$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j v_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu^2$$

$$x_\nu = x_\nu\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right) \sim x_\nu\left(q_i; t\right), \;\; \dot{x}_\nu = \dot{x}_\nu\left(q_i, \dot{q}_i; t\right), \;\; E = E\left(q_i, \dot{q}_i; t\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial E}{\partial q_i} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial q_i}$$

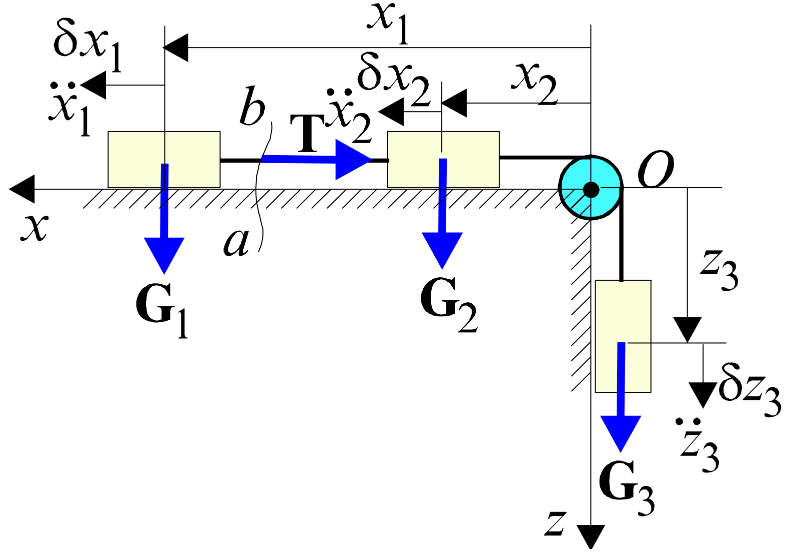
Równania Lagrange'a drugiego rodzaju

$$\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_p}\right]-Q_p\right\}\delta q_p = 0 \;\rightarrow\; \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_p}\right]-Q_p = 0$$

Ogólne równanie dynamiki holonomicznego układu we współrzędnych uogólnionych

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_p}=Q_p \quad (p=1\ldots s)$$

Przykład. Trzy ciała połączone są nierozciągliwą nicią, przerzuconą przez nieruchomy krążek. Pierwsze dwa ciała poruszają się po gładkiej poziomej płaszczyźnie, a trzecie wisi swobodnie. Obliczyć przyspieszenia każdego ciała oraz siłę ***T*** napięcia nici w przekroju *ab*.



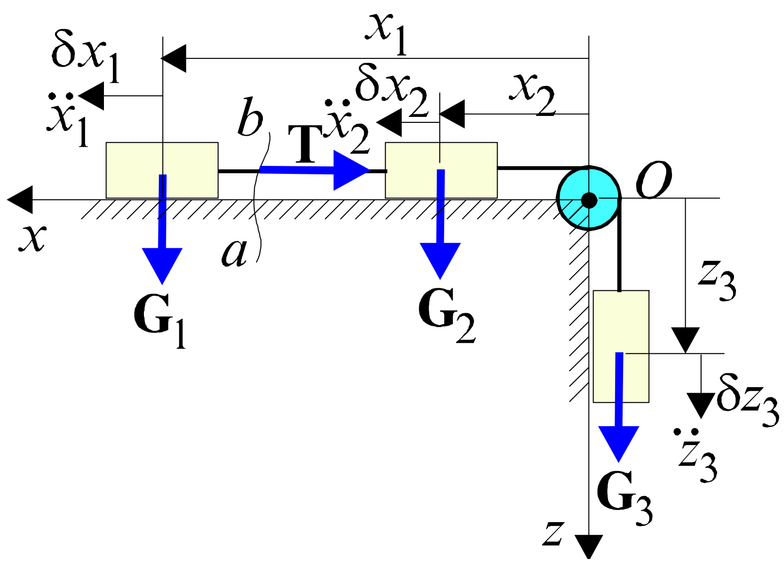
$$\sum_{j=1}^{N}\left(F_{jx}-m_j\ddot{x}_j\right)\delta x_j+\sum_{j=1}^{N}\left(F_{jy}-m_j\ddot{y}_j\right)\delta y_j+\sum_{j=1}^{N}\left(F_{jz}-m_j\ddot{z}_j\right)\delta z_j=0$$

$$F_{1x}=F_{2x}=F_{3x}=0,\;\; F_{1y}=F_{2y}=F_{3y}=0,\;\; F_{1z}=G_1,\;\; F_{2z}=G_2,\;\; F_{3z}=G_3,$$

$$\ddot{x}_1\neq 0,\ddot{x}_2\neq 0,\ddot{x}_3=0,\;\; \ddot{y}_1=\ddot{y}_2=\ddot{y}_3=0,\;\; \ddot{z}_1=\ddot{z}_2=0,\;\; \ddot{z}_3\neq 0,$$

1) $x_1 - x_2 = l_{12} = \text{const} \rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2,\ \delta x_1 = \delta x_2,$

2) $x_2 + z_3 = l_{23} = \text{const} \rightarrow \ddot{x}_2 = -\ddot{z}_3,\ \delta x_2 = -\delta z_3.$



$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = -\ddot{z}_3,\ \delta x_1 = \delta x_2 = -\delta z_3$$

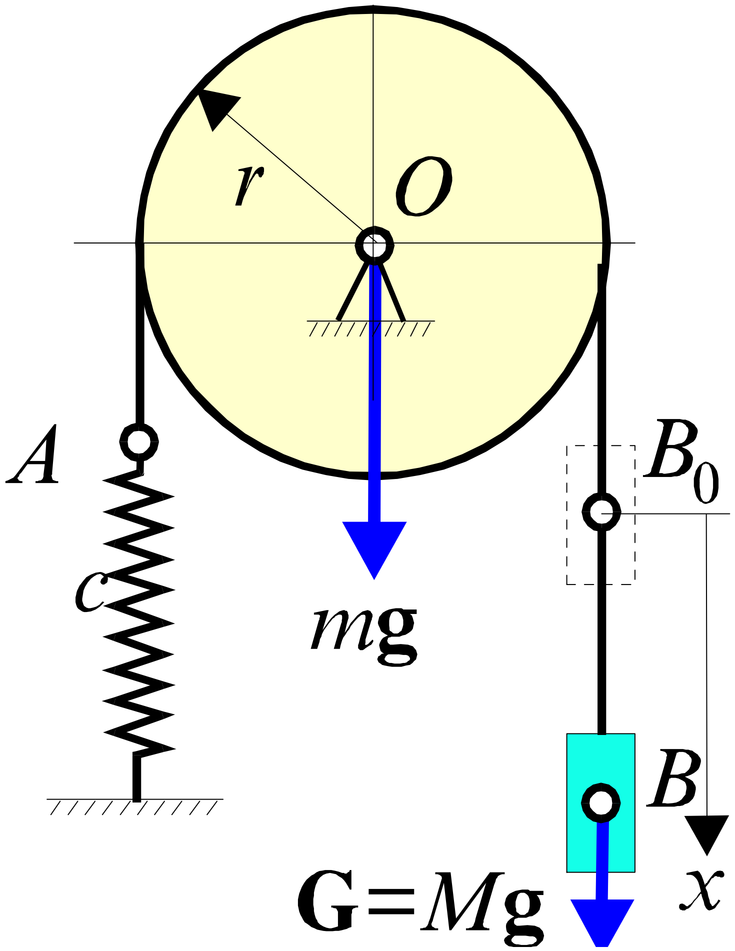
$$-m_1\ddot{x}_1\delta x_1 - m_2\ddot{x}_2\delta x_2 + \left(G_3 - m_3\ddot{z}_3\right)\delta z_3 = 0 \ \text{ lub } \ -\frac{G_1}{g}\ddot{x}_1\delta x_1 - \frac{G_2}{g}\ddot{x}_2\delta x_2 + \left(G_3 - \frac{G_3}{g}\ddot{z}_3\right)\delta z_3 = 0$$

$$G_3 + \frac{G_1 + G_2 + G_3}{g}\ddot{x}_1 = 0 \rightarrow \ddot{x}_1 = -g\frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$\left(-T - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 = 0 \ \text{ lub } \ \left(-T - \frac{G_1}{g}\ddot{x}_1\right)\delta x_1 = 0 \rightarrow -T - \frac{G_1}{g}\ddot{x}_1 = 0 \rightarrow$$

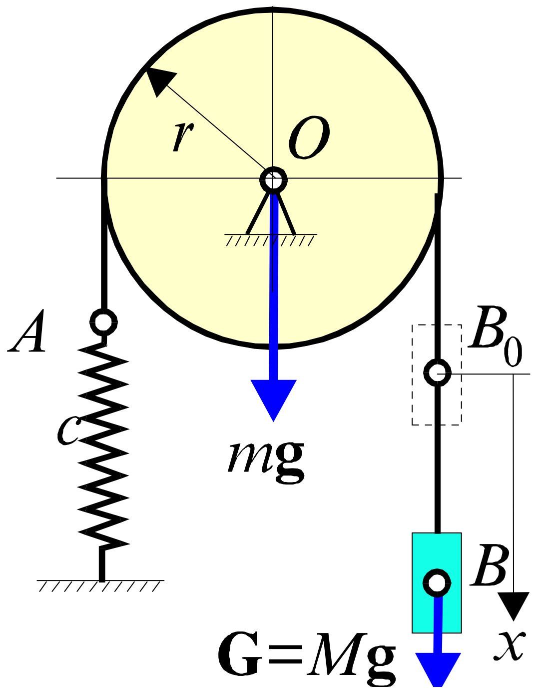
$$T = -\frac{G_1}{g}\ddot{x}_1 = -\frac{G_1}{g}\cdot\left(-g\frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}\right) = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Przykład. Jednorodny krążek o masie *m* i promieniu *r* może obracać się bez tarcia względem osi *O.* Przez ten krążek przerzucona jest nierozciągliwa nić. Do lewego końca nici jest zamocowana jest sprężyna o sztywności *c*, a do prawego – ciężar ***G*** o masie *M*. Określić ruch ciężaru i okres drgań, jeżeli w położeniu równowagi statycznej ciężar ***G*** miał prędkość początkową υ_o, skierowaną w dół. Masę sprężyny i linki pominąć.



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial E}{\partial x}=Q_x$$

Potencjał sił jest równy sumie potencjałów każdej siły.



$$U = Mgx - \frac{1}{2}c\left(x+\lambda\right)^2$$

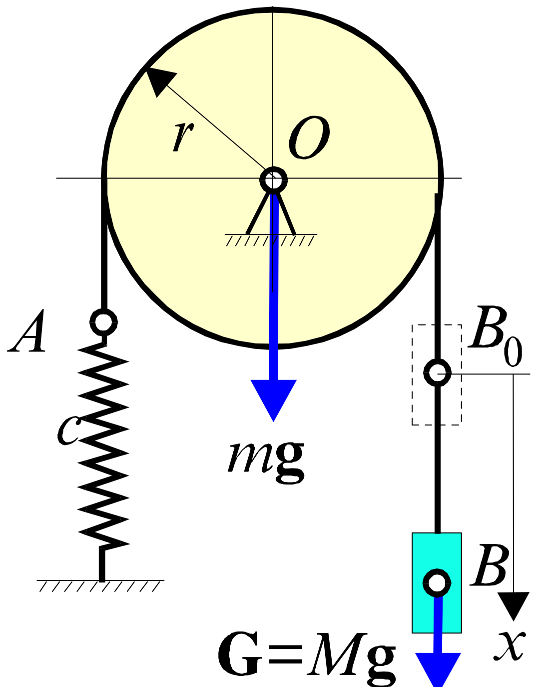
Siła uogólniona

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = Mg - c\left(x+\lambda\right) = \underbrace{MG - c\lambda}_{=0} - cx = -cx$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{2}\right)\dot{x}^2$$

$$I_O = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = \left(M + \frac{m}{2} \right) \dot{x}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} \right) = \left(M + \frac{m}{2} \right) \ddot{x}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

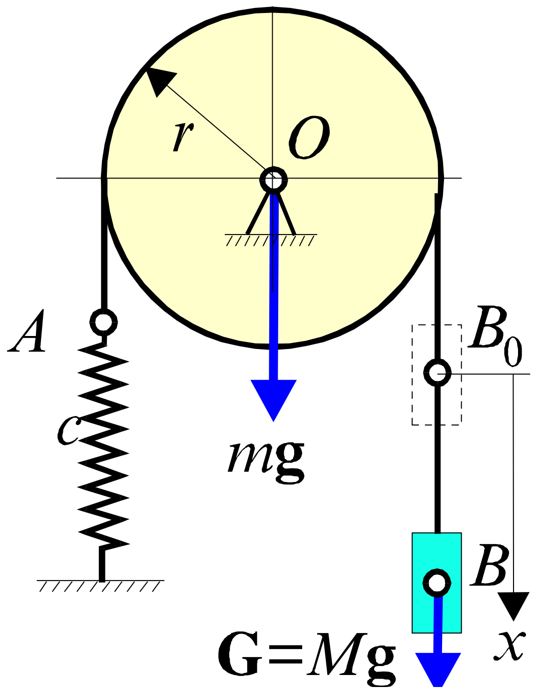
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E}{\partial x} = Q_x$$

Równanie Lagrange'a

$$\ddot{x} + \frac{2c}{2M+m} x = 0 \;\; \text{lub} \;\; \ddot{x} + k^2 x = 0 \quad \left(k^2 = \frac{2c}{2M+m} \right)$$

$$x\big|_{t=t_0=0} \equiv x_0 = 0, \quad \dot{x}\big|_{t=t_0=0} \equiv \dot{x}_0 = v_0$$

$$x = a\sin\left(kt + \varphi_0\right)$$



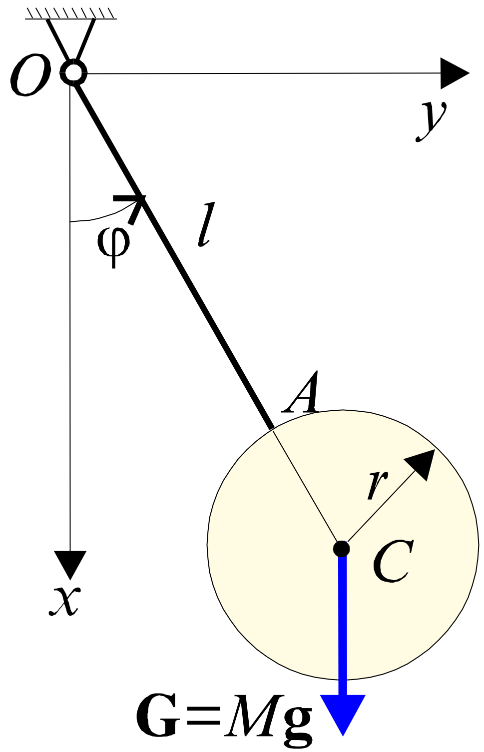
$$a\sin\left(kt+\varphi_0\right)\Big|_{t=t_0=0} = a\sin\varphi_0 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(a\sin\left(kt+\varphi_0\right)\right)\Big|_{t=t_0=0} = ak\cos\left(kt+\varphi_0\right)\Big|_{t=t_0=0} = ak\cos\varphi_0 = v_0$$

$$\begin{cases} a\sin\varphi_0 = 0, \\ ak\cos\varphi_0 = v_0 \end{cases} \rightarrow \ \varphi_0 = 0,\ \ a = \frac{v_0}{k\cos\varphi_0} = \frac{v_0}{k}$$

$$x = \frac{v_0}{k}\sin kt \qquad \left(k = \sqrt{\frac{2c}{2M+m}}\right) \qquad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{M+0,5m}{c}}$$

Przykład. Wyprowadzić równania ruchu wahadła fizycznego, którym jest jednorodny dysk o masie *M* i promieniu *r* zamocowany za pomocą nieważkiego pręta o długości *l*.



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

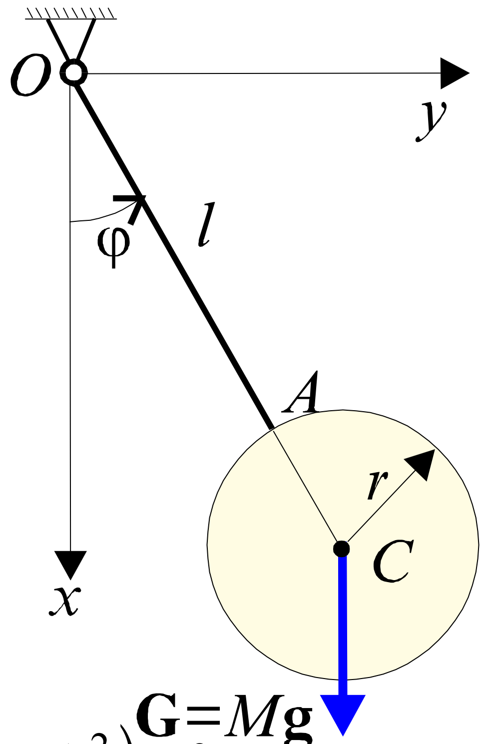
Potencjał

$$U = Mgx_C = Mg\left(l + r\right)\cos\varphi$$

Siła uogólniona

$$Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -Mg\left(l + r\right)\sin\varphi$$

$$E=\frac{1}{2}I_{Oz}\omega^2$$



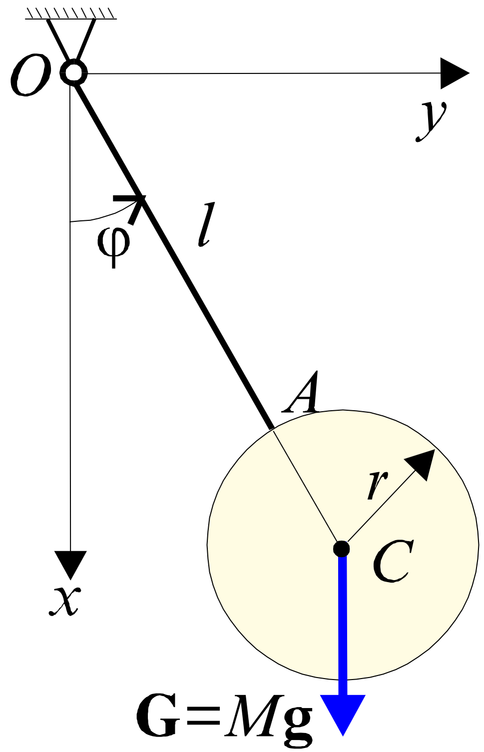
$$I_{Oz}=I_{O_1z}+Md^2=I_{Cz}+M\left(l+r\right)^2,\ \ I_{Cz}=\frac{1}{2}Mr^2\ \rightarrow$$

$$I_{Oz}=\frac{1}{2}Mr^2+M\left(l+r\right)^2=\frac{M}{2}\left(r^2+2\left(l+r\right)^2\right).$$

$$E=\frac{1}{2}I_{Oz}\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}\left(r^2+2\left(l+r\right)^2\right)\dot{\varphi}^2=\frac{M}{4}\left(r^2+2\left(l+r\right)^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}}=I_{Oz}\dot{\varphi}=\frac{M}{2}\left(r^2+2\left(l+r\right)^2\right)\dot{\varphi}\qquad\qquad \frac{\partial E}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{\varphi}}\right)=I_{Oz}\ddot{\varphi}=\frac{M}{2}\left(r^2+2\left(l+r\right)^2\right)\ddot{\varphi}$$



$$I_{Oz}\ddot{\varphi} \equiv \frac{M}{2}\left(r^2 + 2\left(l+r\right)^2\right)\ddot{\varphi} = -Mg\left(l+r\right)\sin\varphi \equiv \mathrm{mom}_{Oz}\mathbf{G}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g\left(l+r\right)}{r^2 + 2\left(l+r\right)^2}\sin\varphi \quad \text{lub} \quad \ddot{\varphi} + \frac{2g\left(l+r\right)}{r^2 + 2\left(l+r\right)^2}\sin\varphi = 0$$

$$\varphi\Big|_{t=t_0=0} \equiv \varphi_0, \qquad \dot{\varphi}\Big|_{t=t_0=0} = \dot{\varphi}_0 \equiv \omega_0$$

Energia kinetyczna we współrzędnych uogólnionych

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu^2$$

$$x_\nu = x_\nu\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right) \;\; (\nu = 1 \ldots 3N)$$

$$\dot{x}_\nu = \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial q_p}{\partial t} + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \equiv \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\dot{q}_p + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \;\; (\nu = 1 \ldots 3N),$$

$$\left(\dot{x}_\nu\right)^2 = \left(\sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\dot{q}_p + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2 = \sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\dot{q}_p \dot{q}_r + 2\sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\dot{q}_p + \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2 \;\; (\nu = 1 \ldots 3N).$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s} \dot{q}_p \dot{q}_r \underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}}_{a_{pr}} + \sum_{p=1}^{s} \dot{q}_p \underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}}_{b_p} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2}_{c}.$$

$$E=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}\dot{q}_p\dot{q}_r\underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}}_{a_{pr}}+\sum_{p=1}^{s}\dot{q}_p\underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}}_{b_p}+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2}_{c}.$$

$$a_{pr}\equiv a_{pr}(q;t)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r},\ \ b_p\equiv b_p(q;t)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t},\ \ c\equiv c(q;t)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2$$

$$E=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}a_{pr}\dot{q}_p\dot{q}_r+\sum_{p=1}^{s}b_p\dot{q}_p+\frac{1}{2}c\equiv E_2+E_1+E_0,$$

$$E_2=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}a_{pr}\dot{q}_p\dot{q}_r,\ \ E_1=\sum_{p=1}^{s}b_p\dot{q}_p,\ \ E_0=\frac{1}{2}c.$$

W przypadku więzów skleronomicnych energia kinetyczna jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych

$$E=E_2=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}a_{pr}(q)\dot{q}_p\dot{q}_r$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_p}=Q_p \quad (p=1\ldots s)$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{p=1}^{s} a_{pr}\ddot{q}_p=(*)$$

Równania Lagrange’a w przypadku sił potencjalnych. Funkcja Lagrange’a

$$U = U\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right)$$

Siły uogólnione $$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1 \ldots s)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_p} = Q_p \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_p} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (p = 1 \ldots s)$$

Funkcja **Lagrange’a**

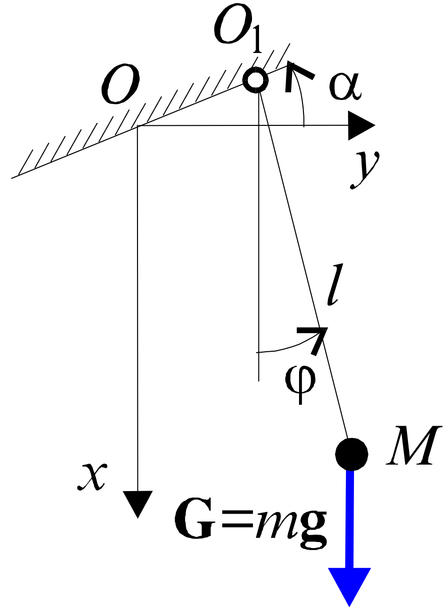
$$L = E + U = E - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_p} = 0 \quad (p = 1 \ldots s)$$

Uwaga. Jeżeli na układ mechaniczny działają siły czynne potencjalne z potencjałem $U=U(q_1,q_2,\ldots q_s;t)$ oraz siły czynne niepotencjalne, które powodują siły uogólnione Q_i^*, to w tym przypadku równania Lagrange'a mają postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_p} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^* \quad (p = 1 \ldots s) \quad \text{lub} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_p} = Q_i^* \quad (p = 1 \ldots s).$$

Przykład. Wyprowadzić równania ruchu wahadła matematycznego M o masie m i długości l. Punkt zawieszenia O_1 wykonuje drgania harmoniczne z amplitudą a i częstością kołową ω w płaszczyźnie pionowej wzdłuż prostej, nachylonej pod kątem α do poziomu.



$$OO_1 = a \sin \omega t$$

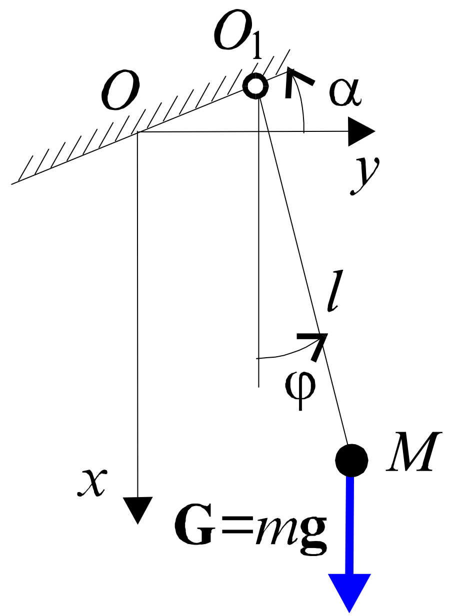
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}$$

$$x_M = l\cos\varphi - OO_1 \sin\alpha = l\cos\varphi - a\sin\omega t \sin\alpha,$$

$$y_M = l\sin\varphi + OO_1 \cos\alpha = l\sin\varphi + a\sin\omega t \cos\alpha.$$

Potencjał

$$U = mgx_M = mg\left(l\cos\varphi - a\sin\omega t\sin\alpha\right).$$



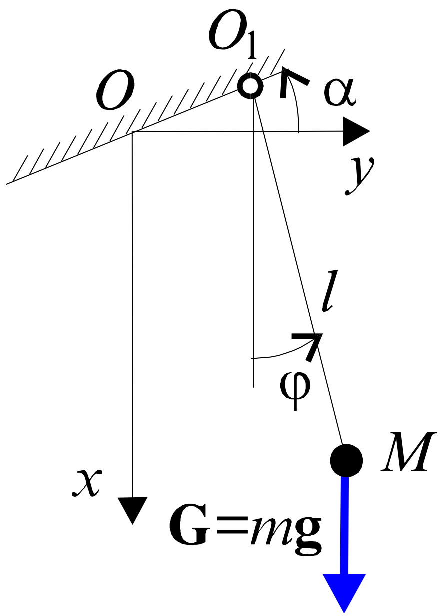
Siła uogólniona

$$Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$$

Energia kinetyczna

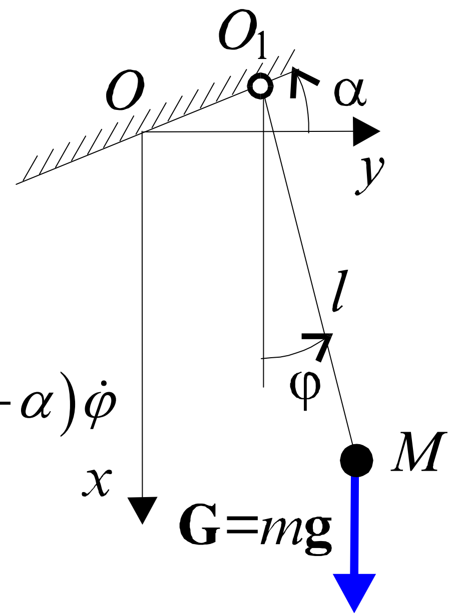
$$E = \frac{1}{2}mv_M^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2\right)$$

$$x_M = l\cos\varphi - OO_1\sin\alpha = l\cos\varphi - a\sin\omega t\sin\alpha,$$
$$y_M = l\sin\varphi + OO_1\cos\alpha = l\sin\varphi + a\sin\omega t\cos\alpha.$$



$$\dot{x}_M = -l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - a\omega\cos\omega t\sin\alpha,$$
$$\dot{y}_M = l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + a\omega\cos\omega t\cos\alpha.$$

$$E = \frac{1}{2}m\left[\left(-l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - a\omega\cos\omega t\sin\alpha\right)^2 + \left(l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + a\omega\cos\omega t\cos\alpha\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}m\Big[\underline{l^2\sin^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2} + 2la\omega\cos\omega t\sin\alpha\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + \underline{\underline{a^2\omega^2\cos^2\omega t\sin^2\alpha}} +$$
$$+\underline{l^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2} + 2la\omega\cos\omega t\cos\alpha\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + \underline{\underline{a^2\omega^2\cos^2\omega t\cos^2\alpha}}\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2la\omega\cos(\omega t)\dot{\varphi}\left(\sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\right) + a^2\omega^2\cos^2\omega t\right] =$$
$$= \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2 + 2la\omega\cos\omega t\cos(\varphi-\alpha)\dot{\varphi} + a^2\omega^2\cos^2\omega t\right].$$



$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + mla\omega\cos\omega t\cos(\varphi-\alpha)$$

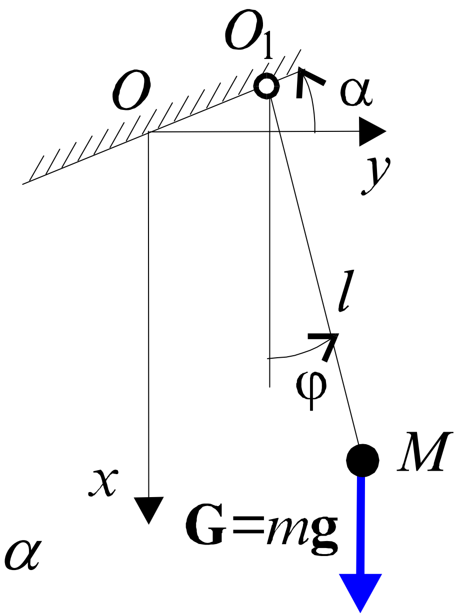
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} - mla\omega^2\sin\omega t\cos(\varphi-\alpha) - mla\omega\cos\omega t\sin(\varphi-\alpha)\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -mla\omega\cos\omega t\sin(\varphi-\alpha)\dot{\varphi}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} - mla\omega^2\sin\omega t\cos(\varphi-\alpha)\cancel{-mla\omega\cos\omega t\sin(\varphi-\alpha)\dot{\varphi}}\cancel{+mla\omega\cos\omega t\sin(\varphi-\alpha)\dot{\varphi}} = -mgl\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{a\omega^2}{l}\sin\omega t\cos(\varphi-\alpha) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{a\omega^2}{l}\sin\omega t\cos(\varphi - \alpha) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$



$$\sin\varphi \approx \varphi, \;\; \cos\varphi \approx 1$$

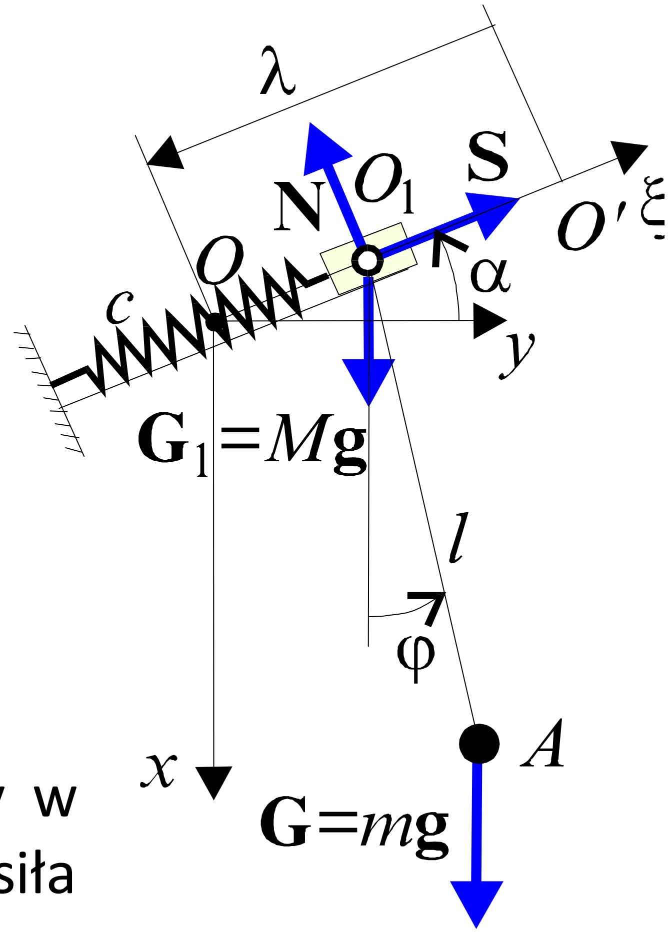
$$\cos(\varphi - \alpha) = \sin\alpha\sin\varphi + \cos\alpha\cos\varphi \approx \varphi\sin\alpha + \cos\alpha$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{a\omega^2}{l}\sin\omega t\left[\varphi\sin\alpha + \cos\alpha\right] + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \left[\frac{g}{l} - \frac{a\omega^2}{l}\sin\omega t\sin\alpha\right]\varphi = \frac{a\omega^2}{l}\sin\omega t\cos\alpha$$

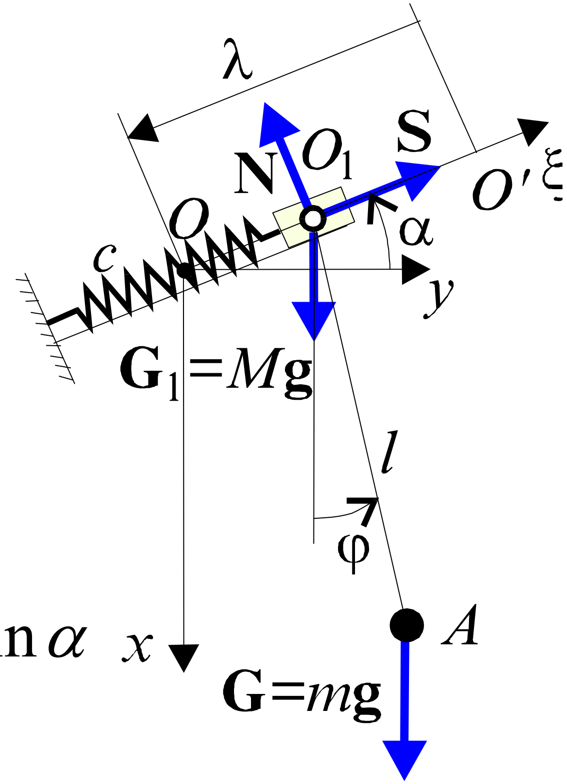
$$\varphi\big|_{t=t_0=0} \equiv \varphi_0, \quad \dot{\varphi}\big|_{t=t_0=0} = \dot{\varphi}_0 \equiv \omega_0$$

Przykład. Wyprowadzić równania ruchu wahadła matematycznego o masie m i długości l, którego punkt zawieszenia O_1 o masie M porusza się pod działaniem sprężyny o sztywności c po doskonale gładkiej równi pochyłej pod kątem α do poziomu. Drugi koniec sprężyny jest nieruchomy.



Środek O osi współrzędnych wybieramy w punkcie równowagi statycznej, tzn. siła sprężyny $\boldsymbol{S}$ równoważy skierowane pionowo do dołu siły ciężkości ciężarów $\boldsymbol{G}=m\boldsymbol{g}$ punktu A i $\boldsymbol{G}_1=M\boldsymbol{g}$ punktu O_1 oraz reakcji $\boldsymbol{N}$ równi pochyłej, skierowanej prostopadle do równi.

Wydłużenie statyczne λ



Rzuty sił na oś ξ

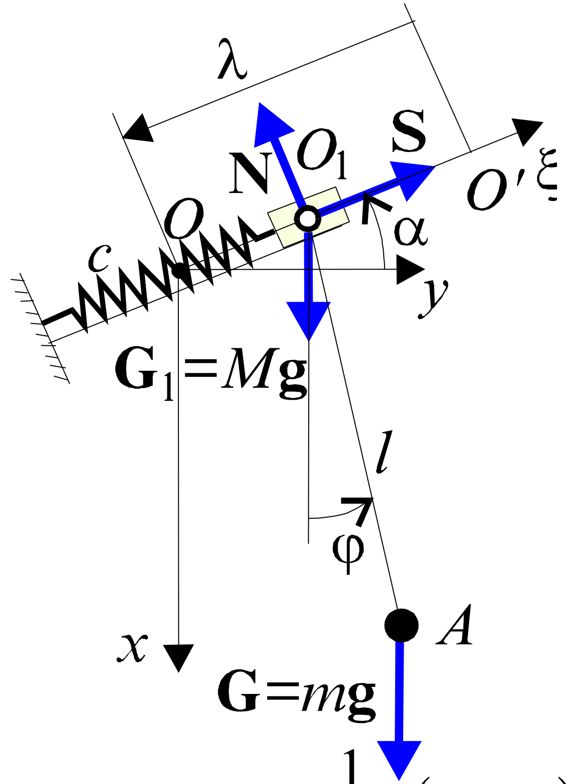
$$-Mg\sin\alpha - mg\sin\alpha + S = 0$$

$$-Mg\sin\alpha - mg\sin\alpha + c\lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{m+M}{c} g\sin\alpha$$

Współrzędne uogólnione – dwa stopnie swobody

$$\varphi \sim q_1 \qquad \xi \sim q_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial E}{\partial \varphi}=Q_\varphi,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot\xi}\right)-\frac{\partial E}{\partial \xi}=Q_\xi$$



$$x_{O_1}=-\xi\sin\alpha,\quad y_{O_1}=\xi\cos\alpha;$$

$$x_A=l\cos\varphi-\xi\sin\alpha,\quad y_A=l\sin\varphi+\xi\cos\alpha.$$

Potencjał

$$U=mgx_A+Mgx_{O_1}-\frac{1}{2}c\left(\xi-\lambda\right)^2=mg\left(l\cos\varphi-\xi\sin\alpha\right)-Mg\xi\sin\alpha-\frac{1}{2}c\left(\xi-\lambda\right)^2$$

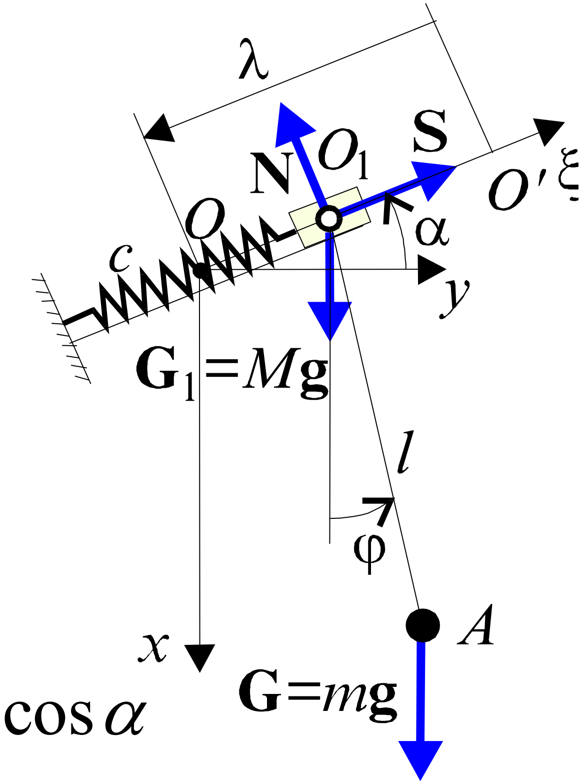
Siły uogólnione

$$Q_\varphi=\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-mgl\sin\varphi,$$

$$Q_\xi=\frac{\partial U}{\partial \xi}=-mg\sin\alpha-Mg\sin\alpha-c\left(\xi-\lambda\right)=-\left(m+M\right)g\sin\alpha-c\xi+c\frac{m+M}{c}g\sin\alpha=-c\xi.$$

Energia kinetyczna

$$E=\frac{1}{2}Mv_{O_1}^2+\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_A^2+\dot{y}_A^2\right)$$



$$x_{O_1}=-\xi\sin\alpha,\;\; y_{O_1}=\xi\cos\alpha;$$

$$x_A=l\cos\varphi-\xi\sin\alpha,\;\; y_A=l\sin\varphi+\xi\cos\alpha.$$

$$\dot{x}_A=-l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}-\dot{\xi}\sin\alpha,\;\; \dot{y}_A=l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}+\dot{\xi}\cos\alpha$$

$$E=\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}m\left[\left(-l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}-\dot{\xi}\sin\alpha\right)^2+\left(l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}+\dot{\xi}\cos\alpha\right)^2\right]=\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2+$$

$$+\frac{1}{2}m\left[\underline{l^2\sin^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2}+2l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin\alpha+\underline{\underline{\dot{\xi}^2\sin^2\alpha}}+\underline{l^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2}+2l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\dot{\xi}\cos\alpha+\underline{\underline{\dot{\xi}^2\cos^2\alpha}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{\varphi}\dot{\xi}\left(\sin\varphi\cdot\sin\alpha+\cos\varphi\cos\alpha\right)+\dot{\xi}^2\right]=$$

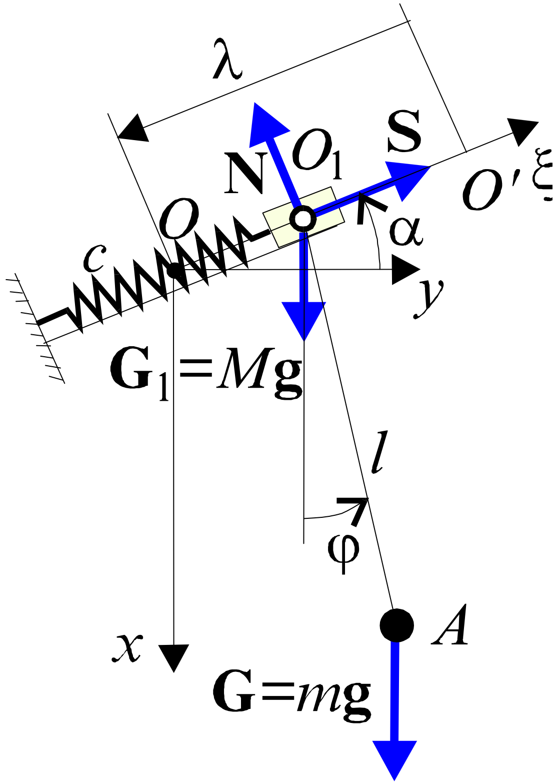
$$=\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{\varphi}\dot{\xi}\cos\left(\varphi-\alpha\right)+\dot{\xi}^2\right].$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{\xi}\cos(\varphi-\alpha),\quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}} = M\dot{\xi} + m\dot{\xi} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha) = (m+M)\dot{\xi} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{\xi}\cos(\varphi-\alpha) - ml\dot{\xi}\sin(\varphi-\alpha)\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}}\right) = (m+M)\ddot{\xi} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha) - ml\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha)\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -ml\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi-\alpha),\quad \frac{\partial E}{\partial \xi} = 0$$



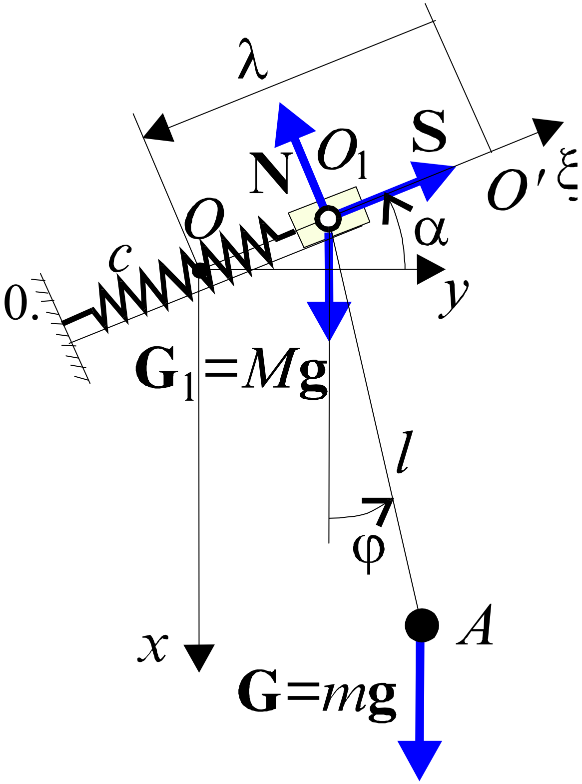
Równania Lagrange'a

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{\xi}\cos(\varphi-\alpha) \cancel{-ml\dot{\xi}\sin(\varphi-\alpha)\dot{\varphi}} \cancel{+ml\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi-\alpha)} = -mgl\sin\varphi$$

$$(m+M)\ddot{\xi} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha) - ml\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha)\dot{\varphi} - 0 = -c\xi$$

$$\ddot{\varphi}+\ddot{\xi}\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{l}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

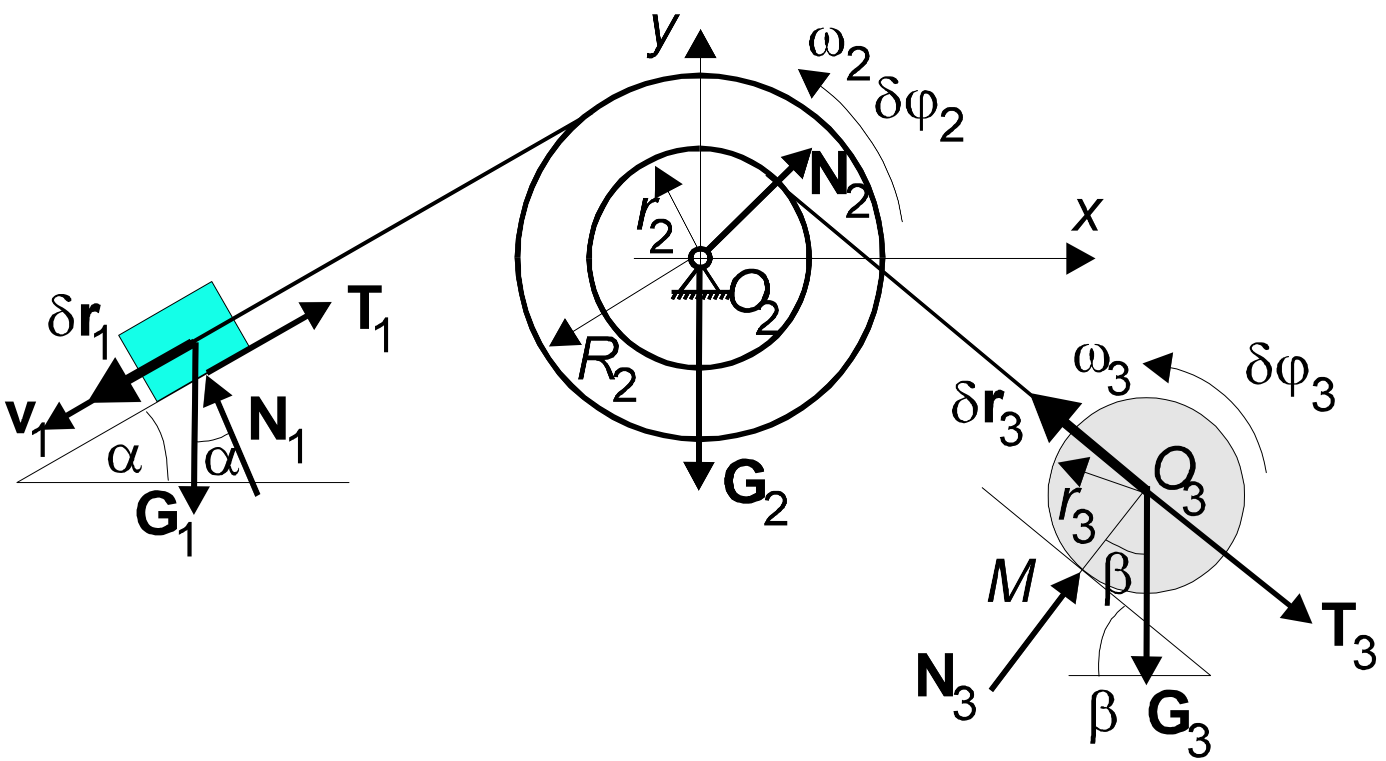
$$\ddot{\xi}+\ddot{\varphi}\frac{ml}{m+M}\cos(\varphi-\alpha)-\dot{\varphi}^2\frac{ml}{m+M}\sin(\varphi-\alpha)+\frac{mlc}{m+M}\xi=0.$$



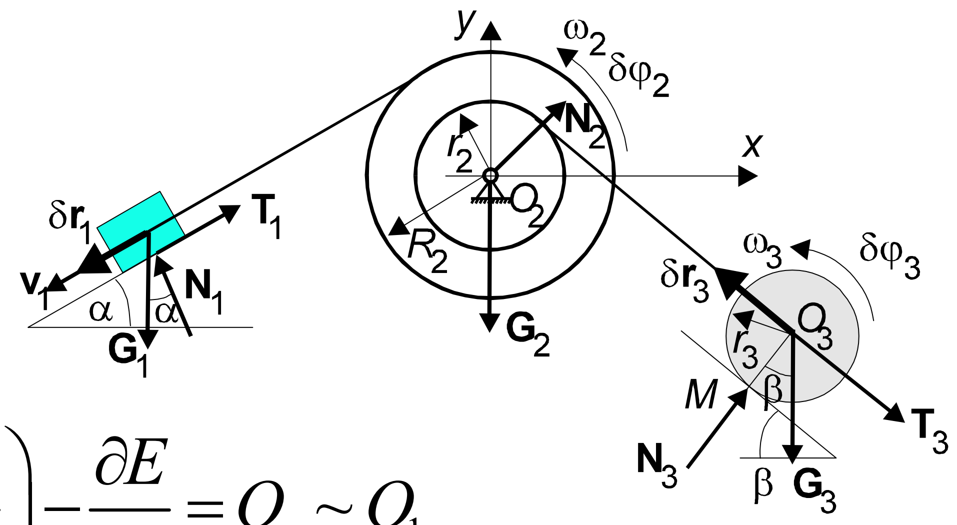
$$\varphi\big|_{t=t_0=0}\equiv\varphi_0,\quad \dot{\varphi}\big|_{t=t_0=0}=\dot{\varphi}_0\equiv\omega_0;$$

$$\xi\big|_{t=t_0=0}\equiv\xi_0,\quad \dot{\xi}\big|_{t=t_0=0}=\dot{\xi}_0\equiv v_0.$$

Przykład. Układ mechaniczny składa się z trzech ciał o masach m_1, m_2, m_3 i promieniach r_1, r_2 i r_3, połączonych nierozciągliwymi nićmi. W położeniu równowagi układ był nieruchomy. Wyznaczyć przyspieszenie p_1 pierwszego ciała. Promień bezwładności ciała *2* równy i_2. Ciało *3* jest jednorodnym dyskiem. Współczynnik tarcia ciała *1* jest równy μ_1 a współczynnik oporu toczenia ciała *3* f_{t3}.



Układ ma jeden stopień swobody
Współrzędna uogólniona:
przemieszczenie ciała 1



$$q_1 = s$$

Równanie Lagrange'a $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E}{\partial s} = Q_s \sim Q_1$$

Siła uogólniona

$$\delta W = \mathbf{G}_1 \circ \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{T}_1 \circ \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{N}_1 \circ \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{G}_3 \circ \delta\mathbf{r}_3 + \mathbf{T}_3 \circ \delta\mathbf{r}_3 + \mathbf{N}_3 \circ \delta\mathbf{r}_3 =$$

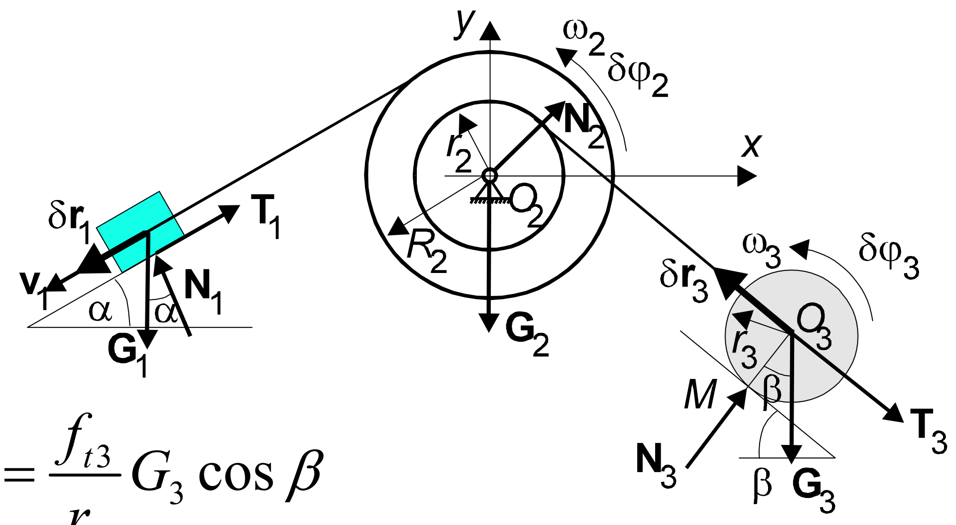
$$= G_1 \cos\left(90^\circ - \alpha\right)\delta r_1 - T_1 \cdot \delta r_1 + 0 + G_3 \cos\left(90^\circ + \beta\right)\delta r_3 - T_3 \cdot \delta r_3 + 0 =$$

$$= G_1 \sin\alpha \cdot \delta r_1 - T_1 \delta r_1 - G_3 \sin\beta \cdot \delta r_3 - T_3 \delta r_3 = \left(G_1 \sin\alpha - T_1\right)\delta r_1 - \left(G_3 \sin\beta + T_3\right)\delta r_3$$

$$\left(\cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha,\ \cos\left(90^\circ + \beta\right) = -\sin\beta\right).$$

$$R_2\delta\varphi_2 = \delta r_1 \;\rightarrow\; \delta\varphi_2 = \frac{\delta r_1}{R_2};$$

$$r_2\delta\varphi_2 = \delta r_3 \;\rightarrow\; \delta r_3 = r_2\frac{\delta r_1}{R_2}$$



$$T_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 G_1 \cos\alpha,\;\; T_3 = \frac{f_{t3}}{r_3} N_3 = \frac{f_{t3}}{r_3} G_3 \cos\beta$$

$$\delta W = (G_1\sin\alpha - T_1)\delta r_1 - (G_3\sin\beta + T_3) r_2 \frac{\delta r_1}{R_2} = \left[(G_1\sin\alpha - T_1) - (G_3\sin\beta + T_3)\frac{r_2}{R_2}\right]\delta r_1 = Q_1\delta r_1 \;\rightarrow$$

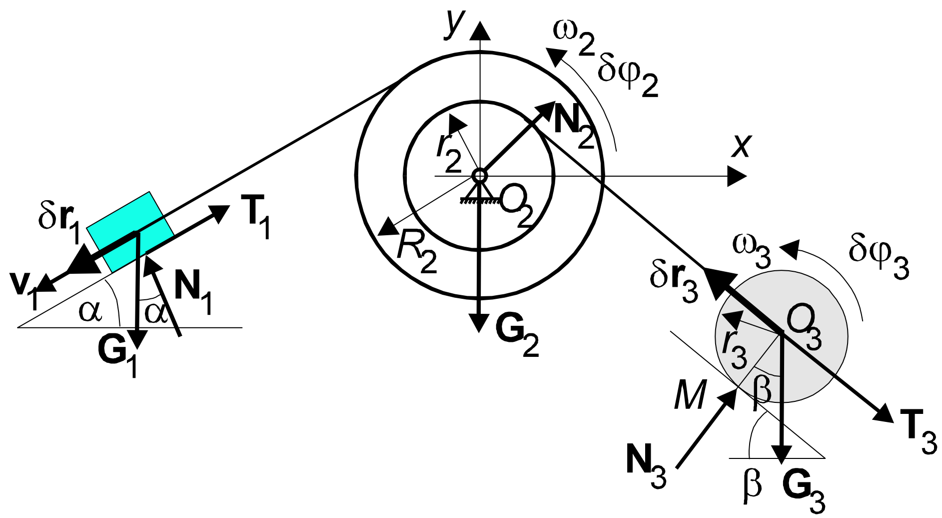
$$Q_1 = (G_1\sin\alpha - T_1) - (G_3\sin\beta + T_3)\frac{r_2}{R_2}.$$

$$Q_1 = (G_1\sin\alpha - \mu_1 G_1\cos\alpha) - \left(G_3\sin\beta + \frac{f_{t3}}{r_3}G_3\cos\beta\right)\frac{r_2}{R_2} =$$

$$= (\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)G_1 - \left(\sin\beta + \frac{f_{t3}}{r_3}\cos\beta\right)\frac{r_2}{R_2}G_3$$

$$= (\sin 45^\circ - \mu_1\cos 45^\circ)m_1 g - \left(\sin 45^\circ + \frac{f_{t3}}{r_3}\cos 45^\circ\right)\frac{r_2}{R_2}m_3 g$$

Energia kinetyczna



$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}^2 = 5\dot{s}^2$$

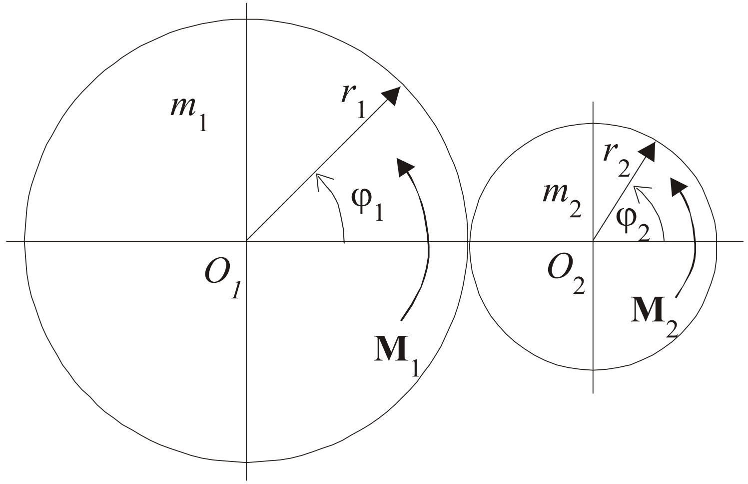
$$E_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \qquad I_2 = m_2 i_2^2, \ \omega_2 R_2 = v_1 \ \rightarrow \ \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$$

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3 \ \rightarrow \ \omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{r_3} = \frac{r_2}{R_2 r_3} v_1 \qquad v_3 = \omega_3 r_3 = \omega_2 \frac{r_2}{r_3} r_3 = \omega_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2} v_1$$

$$E_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^2 v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \cdot \left(\frac{r_2}{R_2 r_3} \right)^2 v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_3 \left[\left(\frac{r_2}{R_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^2 \right] v_1^2 = \frac{3}{4} m_3 \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^2 v_1^2$$

Przykład. Przekładnia zębata składa się z dwóch kół zębatych o masach m_1, m_2 i promieniach r_1, r_2. Do kół zębatych przyłożone są momenty M_1, M_2. Jakie są przyspieszenia kątowe tych kół?



$$r_1\varphi_1 = -r_2\varphi_2$$

$$\varphi_1 \sim q_1$$

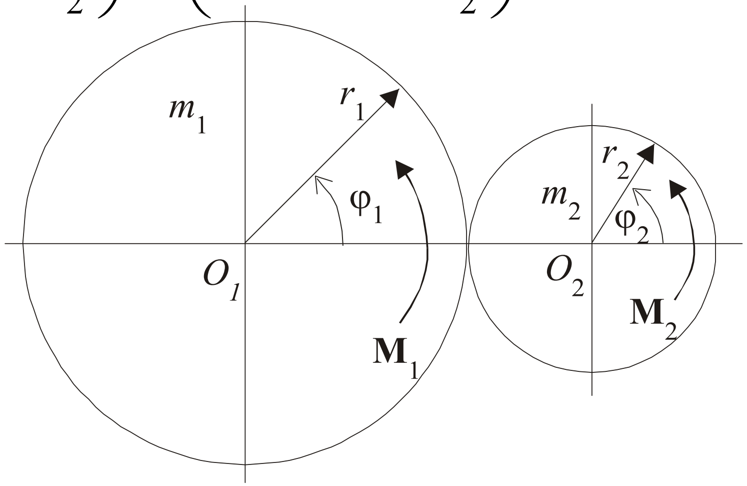
Równanie więzów holonomicznych

$$f \equiv r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}$$

$$\delta' W = M_1 \delta\varphi_1 + M_2 \delta\varphi_2 = M_1 \delta\varphi_1 + M_2 \left(-\delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_2} \right) = \left(M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2} \right) \delta\varphi_1$$

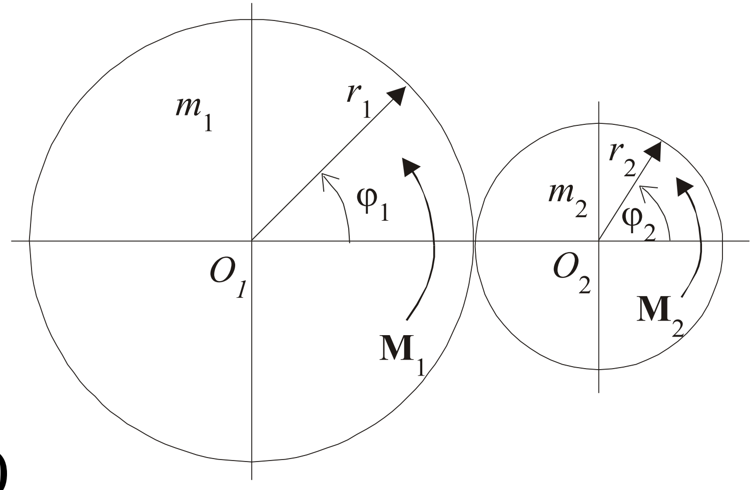
$$Q_{\varphi_1} = M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2}.$$



$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \left(-\frac{r_1}{r_2} \dot{\varphi}_1 \right)^2 = \frac{1}{2} \left(I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \dot{\varphi}_1^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = \left(I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \dot{\varphi}_1$$

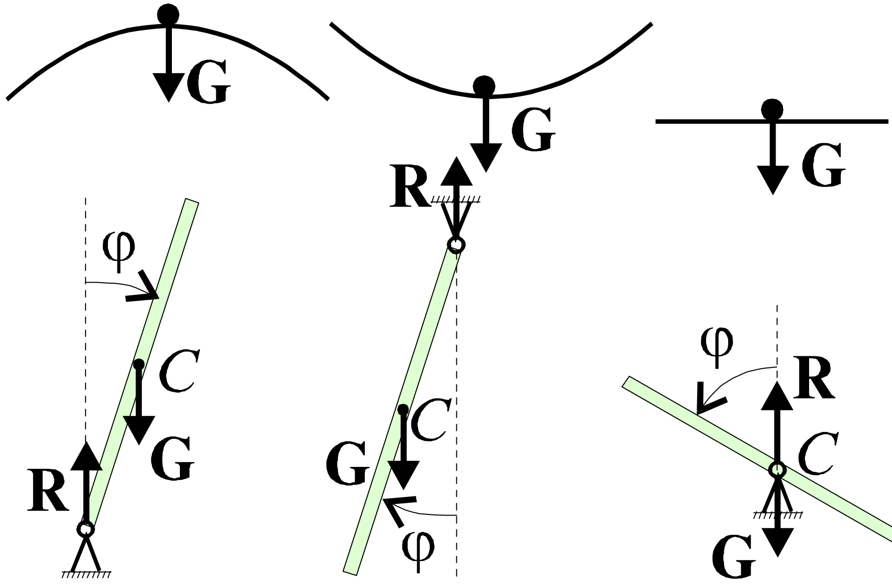


$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \left(I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \ddot{\varphi}_1 \qquad \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0$$

Równanie Lagrange'a

$$\left(I_1 + I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2 \frac{r_1}{r_2}$$

Równowaga stateczna, niestateczna i obojętna

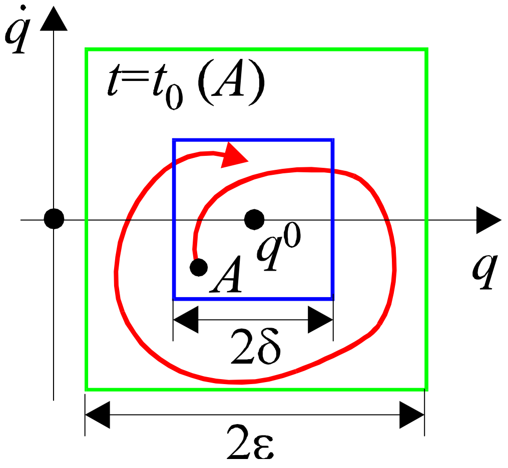


Definicja. Stan równowagi układu jest stateczny w sensie Lapunowa, jeżeli:

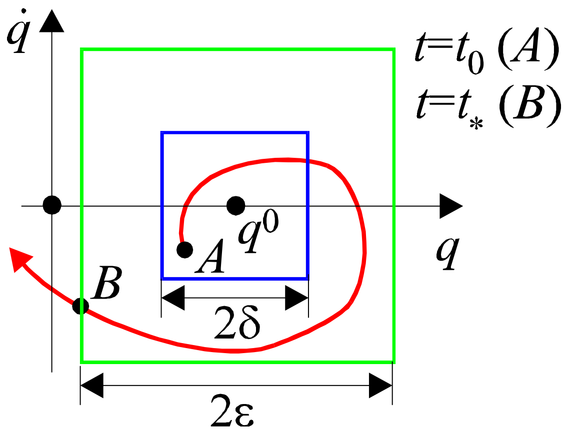
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \left(q_i^*, \dot{q}_{i0}, \; i = 1, \ldots n \right) \; \sum_i \left[\left(q_i^* \right)^2 + \left(\dot{q}_{i0} \right)^2 \right] < \delta^2 \Rightarrow \sum_i \left(q_i(t) \right)^2 < \varepsilon^2$$

Równowaga układu mechanicznego jest obojętna, gdy dowolne małe wychylenie układu z położenia równowagi sprowadza układ w nowe położenie równowagi i nie powoduje ani przybliżenia układu do poprzedniego stanu równowagi, ani oddalenia od niego (tak jak to ma miejsce w przypadku równowagi niestatecznej).

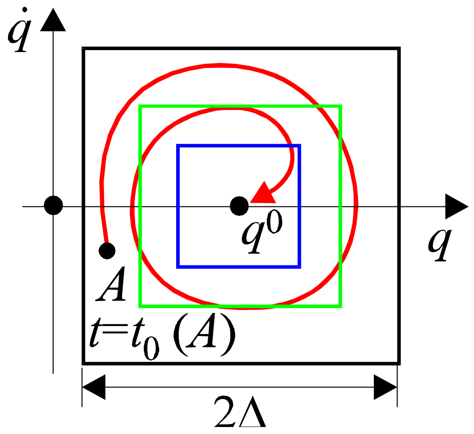
Ważne, że nawet znając położenie równowagi układu mechanicznego, zawsze trzeba zbadać, czy przypadkiem to położenie nie jest stanem równowagi niestatecznej, ponieważ małe zaburzenie tego stanu może spowodować coraz to większe odchylenie od niego i, być może, spowodować wypadek.



Równowaga stateczna



Równowaga niestateczna



Równowaga asymptotycznie stateczna

Kryterium Lagrange'a-Dirichleta. Położenie, w którym energia potencjalna *V ≡ -U* układu mechanicznego, na który nałożone są idealne więzy skleronomiczno-holonomiczne, osiąga minimum (potencjał osiąga maksimum) jest położeniem **równowagi statecznej**.
Jest to warunek koniecznym i wystarczający.

$$\frac{\partial U(q_1)}{\partial q_1} = 0, \ \frac{\partial^2 U(q_1)}{\partial q_1^2} < 0$$

Jeden stopień swobody

$$\frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0, \ \frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} < 0, \ \frac{\partial^2 U(q_1, q_2)}{\partial q_2^2} < 0, \ \frac{\partial^2 U(q_1, q_2)}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 U(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} - \left(\frac{\partial^2 U(q_1, q_2)}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 > 0.$$

Dwa stopnie swobody

Definicja 1. Funkcja f ma w punkcie $(x_0\ y_0)$ należącym do dziedziny D_f minimum lokalne

$$\Updownarrow$$

$$\exists\delta\ \forall(x,y)\in D_f\left[(x,y)\in O((x_0,y_0),\delta)\Rightarrow f(x,y)\geq f(x_0,y_0)\right]$$

Definicja 2. Funkcja f ma w punkcie $(x_0\ y_0)$ należącym do dziedziny D_f maksimum lokalne

$$\Updownarrow$$

$$\exists\delta\ \forall(x,y)\in D_f\left[(x,y)\in O((x_0,y_0),\delta)\Rightarrow f(x,y)\leq f(x_0,y_0)\right]$$

Jeśli w implikacji nierówność zastąpimy nierównością ostrą to mówimy o **minimum (maksimum) właściwym**.

Warunki konieczne i wystarczające istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych

Warunki konieczne

$$\frac{\partial f\left(x_1, ..., x_n\right)}{\partial x_1} = 0, ..., \frac{\partial f\left(x_1, ..., x_n\right)}{\partial x_n} = 0$$

Warunki wystarczające

$$d^2 f \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{i,j} a_{ij} dx_i dx_j \quad \left(a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

$$d^2 f$$

jest dodatnio określona – minimum;
jest ujemnie określona – maksimum;
jest nieokreślona – nie ma ekstremum;
jest półokreślona (ma jeden znak, ale jest równa zeru nie tylko dla argumentów równych zeru) - nie rozstrzyga.

Warunki Sylvestra dodatniej określoności formy kwadratowej

$$K = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Uwaga. Warunki konieczne i wystarczające ujemnej określoności formy kwadratowej można otrzymać z poprzednich nierówności, jeżeli w nieparzystych relacjach (członach) zmienić znak nierówności na przeciwny:

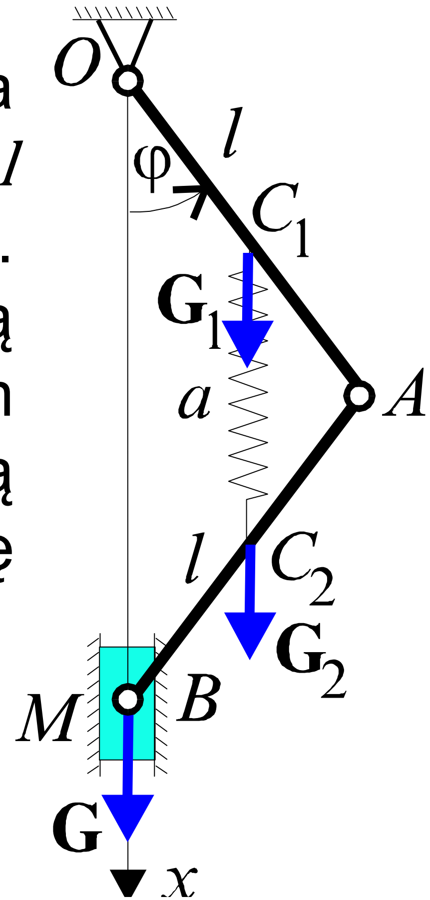
$$a_{11} < 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots,\ (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Uwaga 1. W przypadku, gdy siły czynne działające na układ materialny z doskonałymi więzami skleronomiczno-holonomicznymi są siłami ciężkości to, jeżeli środek ciężkości układu leży w najniższym położeniu, które jest izolowane, to takie położenie równowagi jest stateczne (**zasada Torriczelli'ego**).

Uwaga 2. Jeżeli w położeniu równowagi energia potencjalna nie osiąga minimum, to analiza stateczności staje się bardzo złożona.

Uwaga 3. Równowaga będzie równowagą obojętną, jeżeli w tym położeniu wszystkie pochodne cząstkowe dowolnego rzędu będą zerowe. To znaczy, że w pewnym otoczeniu punktu równowagi energia potencjalna V (potencjał U) jest stała

Przykład. Układem mechanicznym są dwa jednorodne pręty OA i AB o masie m i długości l połączone przegubowo. Tłok M ma masę m_1. Środki prętów są połączone między sobą sprężyną o sztywności c, która w nierozciągniętym stanie ma długość $a_0 < l$. Znaleźć siłę uogólnioną oraz stan równowagi układu. Tarcie i masę sprężyny pominąć.

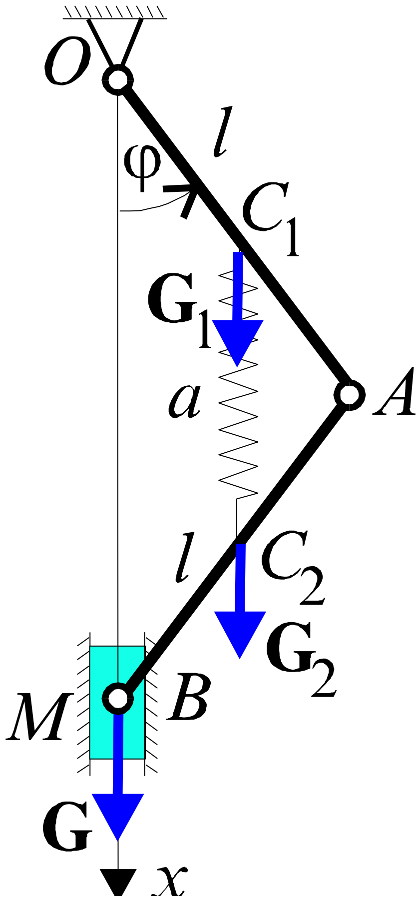


$$q \sim q_1 \equiv \varphi$$

Potencjał sił działających na układ

$$U = mgx_{C_1} + mgx_{C_2} + m_1 g x_B - \frac{1}{2} c\lambda^2$$

Tutaj współrzędne kartezjańskie punktów C_1, C_2, B



$$x_{C_1} = \frac{l}{2}\cos\varphi, \;\; x_{C_2} = \frac{3l}{2}\cos\varphi, \;\; x_B = 2l\cos\varphi$$

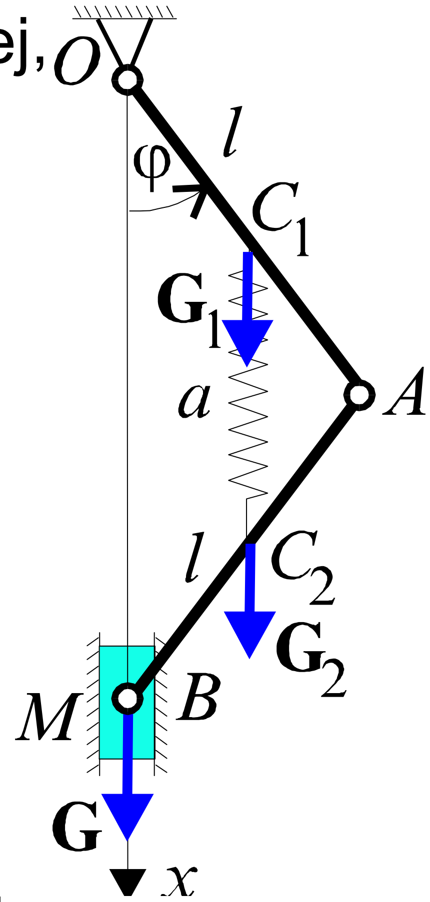
Wydłużenie sprężyny

$$\lambda = C_1C_2 - a_0 = a - a_0 = 2\cdot\frac{l}{2}\cos\varphi - a_0 = l\cos\varphi - a_0$$

$$U = mg\cdot\frac{l}{2}\cos\varphi + mg\cdot\frac{3l}{2}\cos\varphi + m_1g\cdot 2l\cos\varphi - \frac{1}{2}c\left(l\cos\varphi - a_0\right)^2 =$$

$$= 2\left(m + m_1\right)gl\cos\varphi - \frac{1}{2}c\left(l\cos\varphi - a_0\right)^2.$$

Różniczkując funkcję po współrzędnej uogólnionej, otrzymujemy



$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -2(m+m_1)gl\sin\varphi - \frac{1}{2}c\cdot 2(l\cos\varphi - a_0)\frac{\partial(l\cos\varphi - a_0)}{\partial\varphi} =$$

$$= -2(m+m_1)gl\sin\varphi - c(l\cos\varphi - a_0)\cdot(-l\sin\varphi) =$$

$$= -2(m+m_1)gl\sin\varphi + lc(l\cos\varphi - a_0)\sin\varphi =$$

$$= -l\left[2(m+m_1)g - c(l\cos\varphi - a_0)\right]\sin\varphi.$$

Wyznaczamy siłę uogólnioną

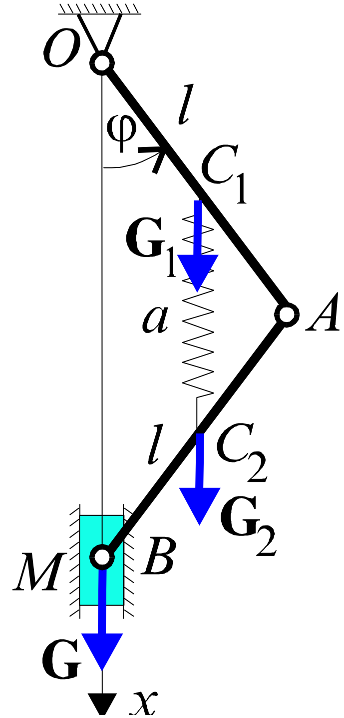
$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \sim \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -l\left[2(m+m_1)g - c(l\cos\varphi - a_0)\right]\sin\varphi.$$

$$Q_1 = 0 \;\rightarrow\; -l\left[2(m+m_1)g - c(l\cos\varphi - a_0)\right]\sin\varphi = 0 \;\rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\varphi = 0, \\ 2(m+m_1)g - c(l\cos\varphi - a_0) = 0. \end{array}\right.$$

Stateczność położeń równowagi

Każde z rozwiązań spełnia warunek konieczny



$$\varphi = \varphi_1 = 0 \qquad \varphi = \varphi_2 = \arccos\frac{2(m+m_1)g + ca_0}{cl}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \sim \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) = -l\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[2(m+m_1)g\sin\varphi - c(l\cos\varphi - a_0)\sin\varphi\right] =$$

$$= -l\left\{2(m+m_1)g\cos\varphi - c\left[-l\sin\varphi\cdot\sin\varphi + (l\cos\varphi - a_0)\cos\varphi\right]\right\} =$$

$$= -l\left\{2(m+m_1)g\cos\varphi - c\left[-l\sin^2\varphi + l\cos^2\varphi - a_0\cos\varphi\right]\right\} =$$

$$= -l\left\{\left[2(m+m_1)g + ca_0\right]\cos\varphi + cl\left[1 - 2\cos^2\varphi\right]\right\} =$$

$$= -l\left\{\left[2(m+m_1)g - c(l\cos\varphi - a_0)\right]\cos\varphi + cl\sin^2\varphi\right\}.$$

$$\varphi = \varphi_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = l\left\{-2\left(m+m_1\right)g + c\left(l-a_0\right)\right\}$$

1. Jeżeli jest to jedyne położenie równowagi (to znaczy, że sztywność sprężyny jest bardzo mała sprężyna jest długa), to spełniony jest warunek

$$2\left(m + m_1\right)g > c\left(l - a_0\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} < 0$$

Równowaga w tym punkcie jest stateczna.

2. Jeżeli to położenie równowagi jest jedno ale dwukrotne, to spełniony jest warunek

$$2\left(m+m_1\right)g = c\left(l-a_0\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

Stosując kryterium Lagrange'a-Dirichleta nie możemy rozstrzygnąć tego czy równowaga jest stateczna

$$\frac{\partial^3 U}{\partial q_1^3} \sim \frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} = l\left\{\left[2\left(m+m_1\right)g - c\left(l\cos\varphi - a_0\right)\right]\sin\varphi - 3cl\sin\varphi\cos\varphi\right\},$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial q_1^4} \sim \frac{\partial^4 U}{\partial \varphi^4} = l\left\{\left[2\left(m+m_1\right)g - c\left(l\cos\varphi - a_0\right)\right]\cos\varphi - 3cl\cos^2\varphi + 4cl\sin^2\varphi\right\}.$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial \varphi^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 U}{\partial \varphi^4} < 0.$$

Równowaga jest stateczna

3. Jeżeli istnieją dwa położenia równowagi tego układu (to znaczy, że sztywność sprężyny jest dostatecznie wielka lub sama sprężyna jest dostatecznie krótka), to spełniony jest warunek

$$2(m+m_1)g<c(l-a_0)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} > 0$$

Równowaga niestateczna

$$\varphi = \varphi_2 = \arccos\frac{2(m+m_1)g+ca_0}{cl} \quad \to \quad \cos\varphi = \frac{2(m+m_1)g+ca_0}{cl}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -l\left\{\left[2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right]\cos\varphi + cl\left[1-2\cos^2\varphi\right]\right\} =$$

$$= -l\left\{\left[2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right]\frac{2\left(m+m_1\right)g + ca_0}{cl} + cl\left[1-2\left(\frac{2\left(m+m_1\right)g + ca_0}{cl}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= -l\left\{\frac{\left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)^2}{cl} + cl\left[1-2\frac{\left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)^2}{c^2l^2}\right]\right\} =$$

$$= -l\left\{\frac{\left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)^2}{cl} + cl\left[\frac{c^2l^2 - 2\left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)^2}{c^2l^2}\right]\right\} =$$

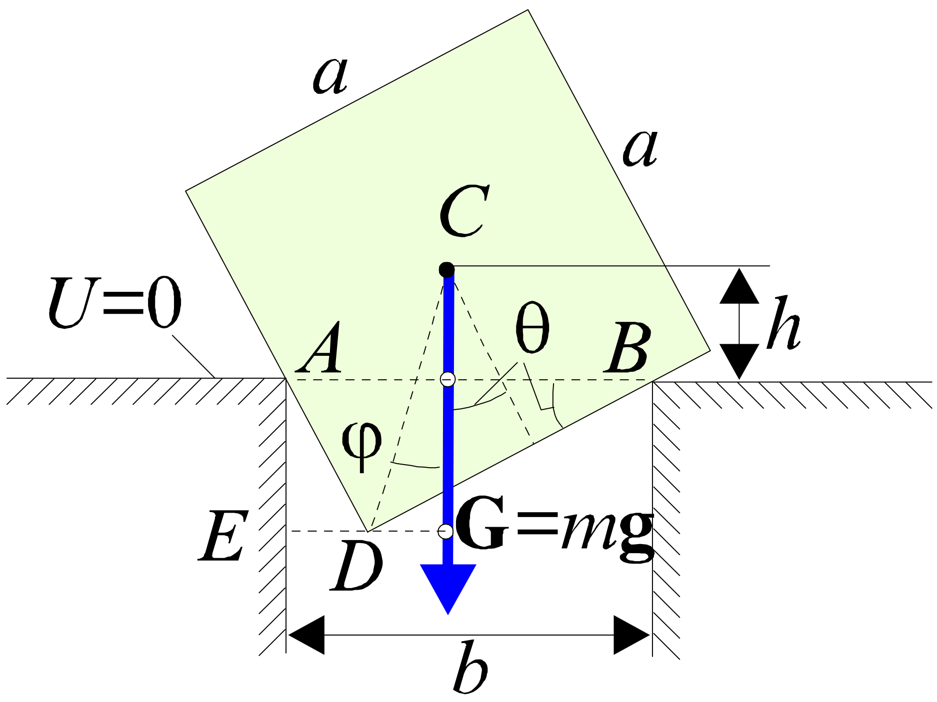
$$= -\frac{1}{c}\left\{\left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)^2 + c^2l^2 - 2\left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)^2\right\} =$$

$$= -\frac{1}{c}\left\{c^2l^2 - \left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)^2\right\} = -\frac{1}{c}\left\{\left[cl - \left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)\right]\left[cl + \left(2\left(m+m_1\right)g + ca_0\right)\right]\right\} =$$

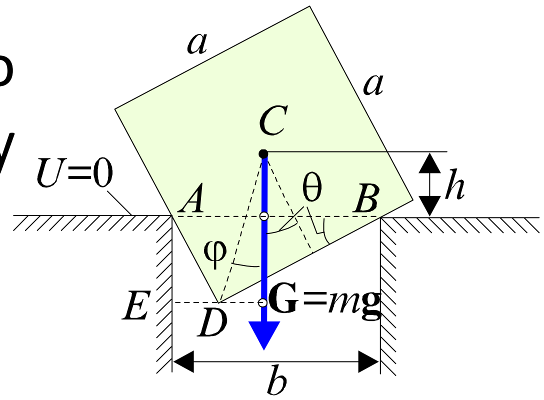
$$= -\frac{1}{c}\left\{\underbrace{\left[c\left(l-a_0\right) - 2\left(m+m_1\right)g\right]}_{>0}\underbrace{\left[c\left(l+a_0\right) + 2\left(m+m_1\right)g\right]}_{>0}\right\} < 0.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} < 0 \qquad \rightarrow \qquad \varphi = \varphi_2$$ jest zawsze stateczne

Przykład. Jednorodna pryzmatyczna belka o przekroju kwadratowym i masie m leży oparta (punkty A i B) o dwa położone w jednej płaszczyźnie poziomej występy odległe o $b < a\sqrt{2}$. Znaleźć położenie równowagi tej belki.



Układ ma jeden stopień swobody. Jako współrzędną uogólnioną przyjmujemy kąt między kierunkiem siły ciężkości i *CD*.



$$q_1 \sim \varphi$$

I.

Energia potencjalna

$$V \equiv -U(\varphi) = mgh = mg\left(CD\cos\varphi - AE\right)$$

$$BD = AB\cos\theta = b\cos\theta,\;\; AE = BD\sin\theta = b\cos\theta\sin\theta$$

$$V \equiv -U(\varphi) = mg\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi - b\cos\theta\sin\theta\right)$$

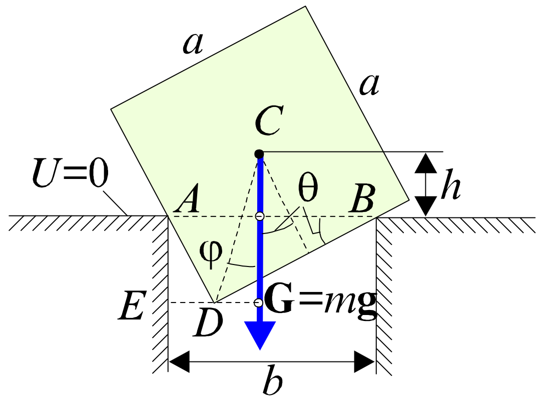
$$\varphi + \theta = \frac{\pi}{4} \;\rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4} - \varphi,\;\; \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$V \equiv -U(\varphi) = mg\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi - \frac{b}{2}\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right]\right) \rightarrow U(\varphi) = -\frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2}\cos\varphi - b\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)\right)$$

$$U(\varphi) = -\frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2}\cos\varphi - b\cos 2\varphi\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} \equiv Q_1 = -\frac{mg}{2}\left(-a\sqrt{2}\sin\varphi + 2b\sin 2\varphi\right) = -\frac{mg}{2}\left(-a\sqrt{2}\sin\varphi + 2b\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2} - 4b\cos\varphi\right)\sin\varphi.$$



$$\frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2} - 4b\cos\varphi\right)\sin\varphi = 0 \;\rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\sin\varphi = 0,\\ a\sqrt{2} - 4b\cos\varphi = 0.\end{array}\right.$$

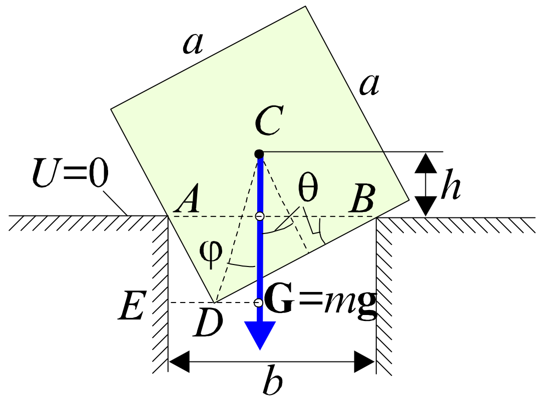
$$\varphi = \varphi_1 = 0 \qquad \varphi = \varphi_2 = \arccos\frac{a\sqrt{2}}{4b} \qquad a \le 2\sqrt{2}b$$

$$a = 2\sqrt{2}b \qquad \rightarrow \qquad \varphi = \varphi_2 = \varphi_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \equiv -\frac{mg}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-a\sqrt{2}\sin\varphi + 2b\sin 2\varphi\right) = \frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2}\cos\varphi - 4b\cos 2\varphi\right)$$

$$\varphi = \varphi_1 = 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2} - 4b\right) < 0 \quad \text{przy} \;\; a < 2\sqrt{2}b$$

$$\varphi = \varphi_2 = \arccos\frac{a\sqrt{2}}{4b} \qquad\qquad \cos\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{4b}$$

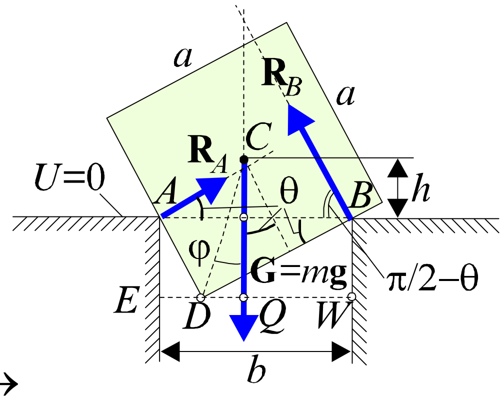


$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = \frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2}\cos\varphi - 4b\cos 2\varphi\right) = \frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2}\cos\varphi - 4b\left(2\cos^2\varphi - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{mg}{2}\left(a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{4b} - 4b\left(2\frac{a^2\cdot 2}{16b^2} - 1\right)\right) = \frac{mg}{2}\left(\frac{a^2}{2b} - 4b\left(\frac{a^2}{4b^2} - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{mg}{2}\left(\frac{a^2}{2b} - \frac{a^2}{b} + 4b\right) = \frac{mg}{2}\left(-\frac{a^2}{2b} + 4b\right) = -\frac{mg}{4b}\left(a^2 - 8b^2\right) > 0 \ \text{ przy } \ a < 2\sqrt{2}b.$$

II



$$R_x \equiv \sum F_{ix} = R_A\cos\theta - R_B\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = R_A\cos\theta - R_B\sin\theta = 0 \;\rightarrow\; \underline{R_A = R_B\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$R_y \equiv \sum F_{iy} = R_A\sin\theta + R_B\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - G = R_A\sin\theta + R_B\cos\theta - G = 0 \;\rightarrow$$

$$R_B\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta + R_B\cos\theta = G \;\rightarrow\; R_B\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta} = G \;\rightarrow\; R_B\frac{1}{\cos\theta} = G \;\rightarrow\; \underline{R_B = G\cos\theta};$$

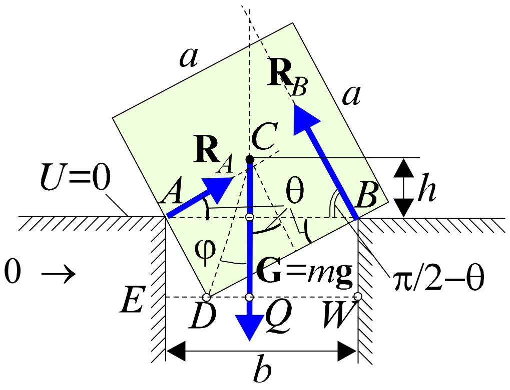
$$M_{Az} \equiv \sum \mathrm{mom}_{Az}\mathbf{F}_i = R_B\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot AB - G\cdot EQ = 0$$

$$EQ = ED + DQ,\;\; DQ = DC\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi,\;\; ED = AB - DW = b - BD\cdot\cos\theta = b - AB\cos\theta\cdot\cos\theta =$$

$$= b - b\cos^2\theta = b\sin^2\theta \;\rightarrow\; EQ = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi + b\sin^2\theta$$

$$M_{Az} = R_B b\cos\theta - G\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi + b\sin^2\theta\right) = 0$$

$$Gb\cos^2\theta - G\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi + b\sin^2\theta\right) = 0 \rightarrow b\cos^2\theta - b\sin^2\theta - \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi = 0 \rightarrow$$



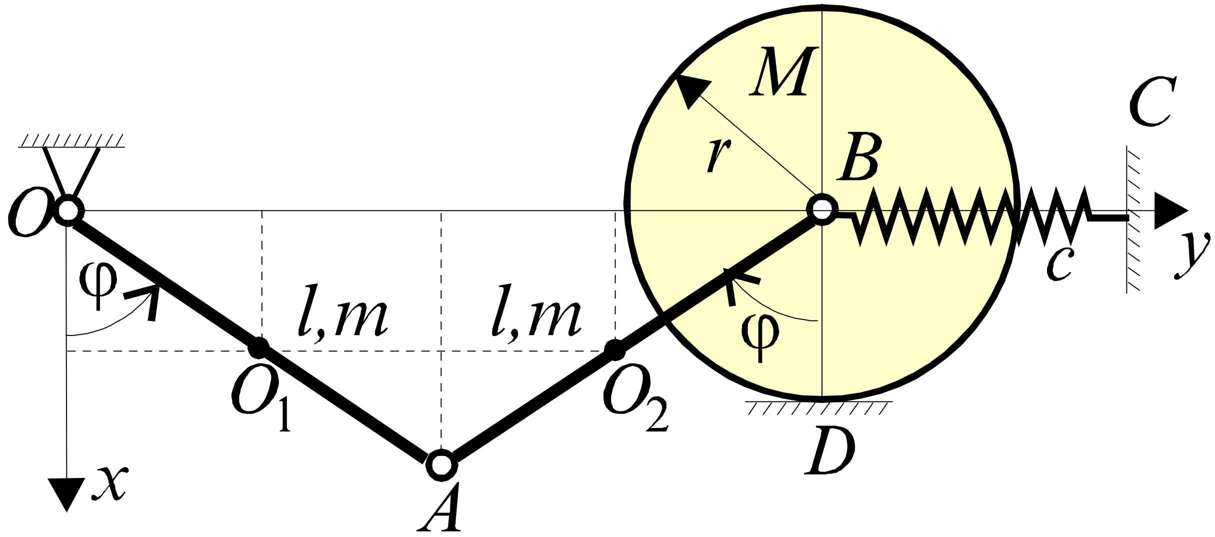
$$b\cos 2\theta - \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi = 0 \rightarrow b\cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi = 0 \rightarrow b\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) - \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi = 0 \rightarrow$$

$$b\sin 2\varphi - \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi = 0 \rightarrow 2b\sin\varphi\cos\varphi - \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi = 0 \rightarrow \left(2b\cos\varphi - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sin\varphi = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\varphi = 0, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{2\sqrt{2}b}. \end{array}\right.$$

$$\varphi = \varphi_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_A = R_B = \frac{\sqrt{2}}{2}G$$

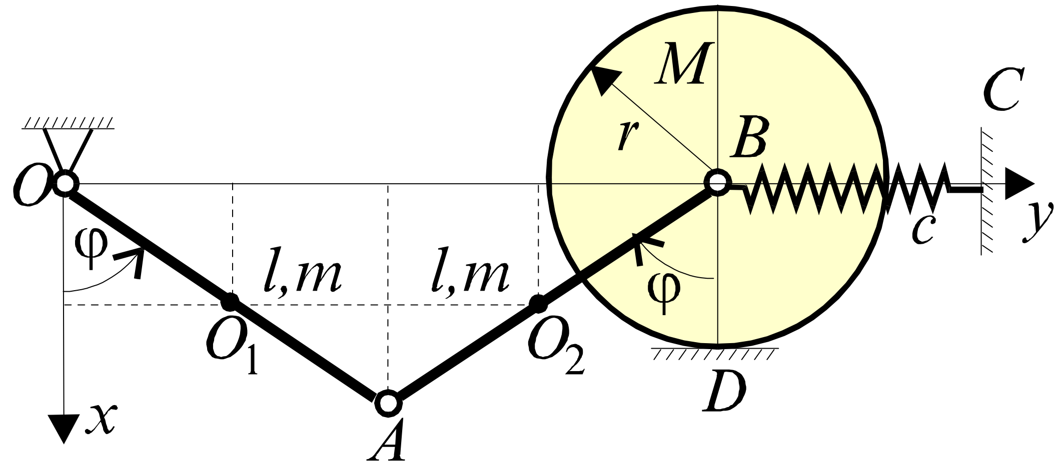
$$\cos\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{4b} \qquad \rightarrow \qquad R_A = \frac{\sqrt{2}}{4b}\sqrt{4b^2 - a\sqrt{8b^2 - a^2}}\,G, \quad R_B = \frac{1}{4b}\left(a + \sqrt{8b^2 - a^2}\right)G.$$



Przykad. Wyznaczyć okres drgań układu mechanicznego, którym są dwa jednakowe pręty o długości l i masie m każdy, połączone przegubowo między sobą, z nieruchomym punktem O oraz jednorodnym dyskiem o promieniu r i masie M. Dysk może toczyć się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie, a jego środek jest połączony z nieruchomą ścianą sprężyną o sztywności c. Sprężyna jest nierozciągnięta, gdy pręty są w położeniu pionowym

Współrzędna uogólniona

$$\varphi \sim q_1$$



Współrzędne środków mas prętów i dysku

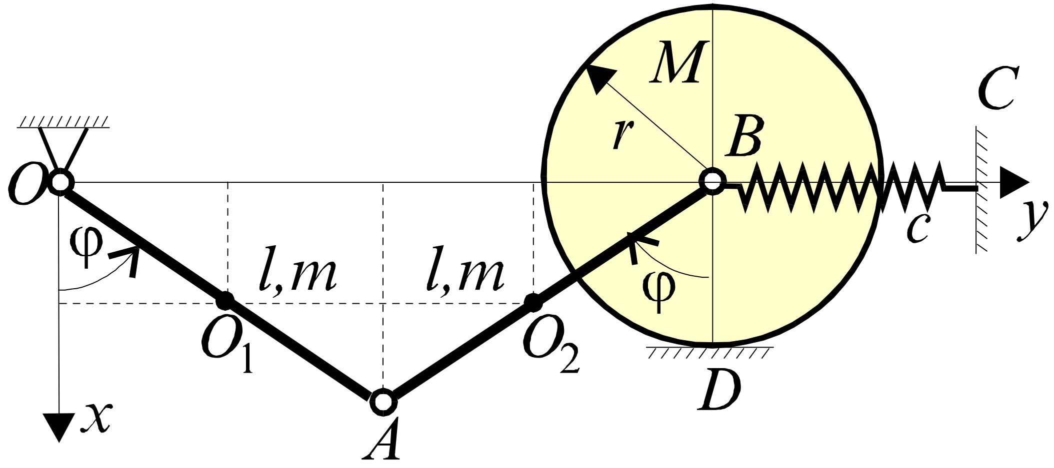
$$x_{O_1} = \frac{l}{2}\cos\varphi, \;\; y_{O_1} = \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

$$x_{O_2} = \frac{l}{2}\cos\varphi, \;\; y_{O_2} = l\sin\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi = \frac{3l}{2}\sin\varphi,$$

$$x_B = 0, \;\; y_B = 2l\sin\varphi.$$

Równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial E}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}$$



Energia potencjalna

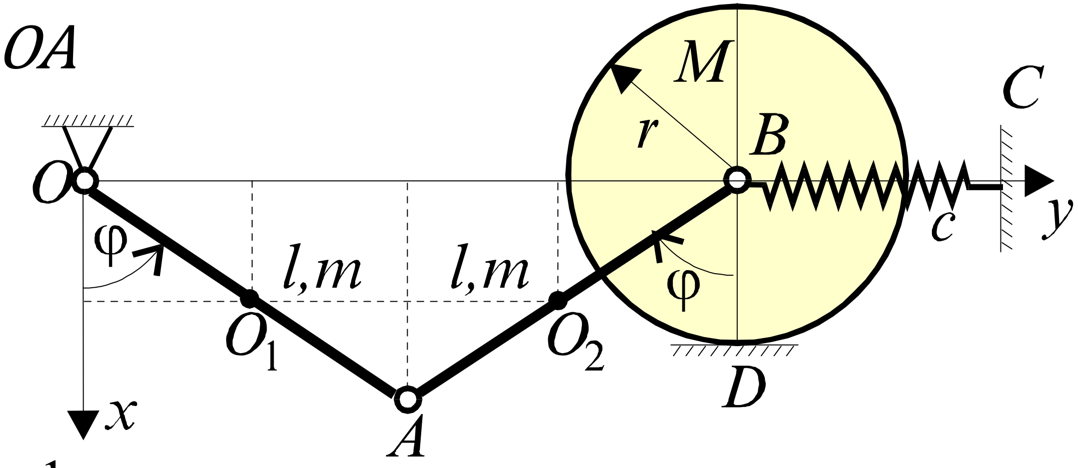
$$U=mgx_{O_1}+mgx_{O_2}-\frac{1}{2}cy_B^2=mg\frac{l}{2}\cos\varphi+mg\frac{l}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}c\left(2l\sin\varphi\right)^2=mgl\cos\varphi-2cl^2\sin^2\varphi$$

Energia kinetyczna koła

$$E_k=\frac{1}{2}Mv_B^2+\frac{1}{2}I_B\omega^2=\frac{1}{2}Mv_B^2+\frac{1}{2}I_B\frac{v_B^2}{r^2}=\frac{1}{2}\left(M+\frac{I_B}{r^2}\right)v_B^2=\frac{1}{2}\left(M+\frac{\frac{1}{2}Mr^2}{r^2}\right)\dot{y}_B^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(M+\frac{1}{2}M\right)\left(2l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\right)^2=3Ml^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2.$$

Energia kinetyczna pręta *OA*



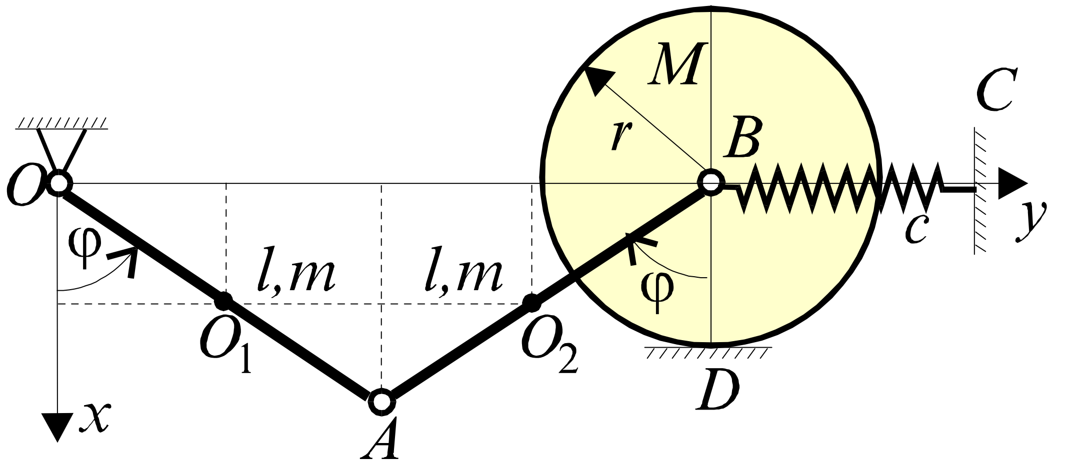
$$I_{1A} = I_{1O_1} + md^2 \quad \left(d = l/2\right)$$

$$I_{1A} = \frac{1}{3}m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3}ml^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2$$

Energia kinetyczna pręta AB

$$\omega = \frac{v_B}{r} = \dot{\varphi}$$



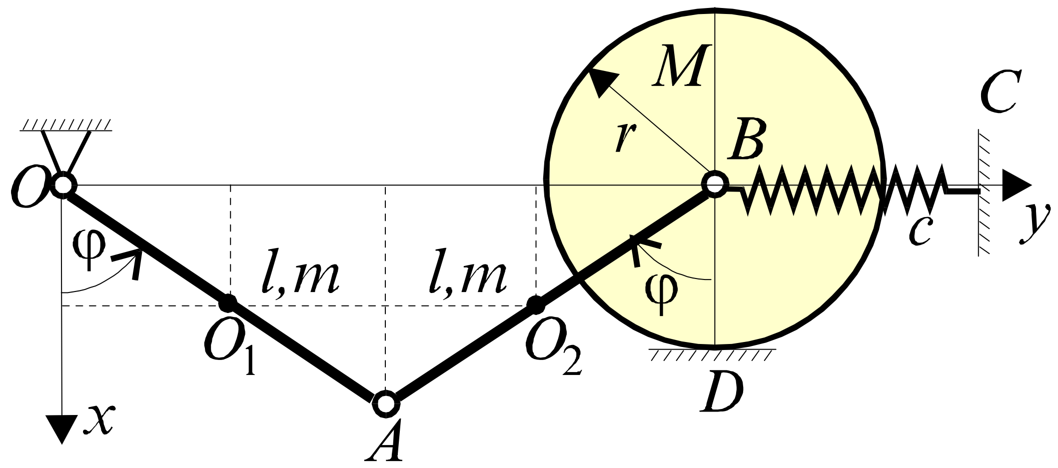
$$E_2 = \frac{1}{2} m v_{O_2}^2 + \frac{1}{2} I_{2O_2} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_{O_2}^2 + \dot{y}_{O_2}^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\left(-\frac{l}{2} \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \right)^2 + \left(\frac{3l}{2} \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{4} l^2 \sin^2\varphi + \frac{9}{4} l^2 \cos^2\varphi \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{8} m l^2 \left[1 + 8\cos^2\varphi \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{24} m l^2 \left[4 + 24\cos^2\varphi \right] \dot{\varphi}^2.$$

Energia kinetyczna układu

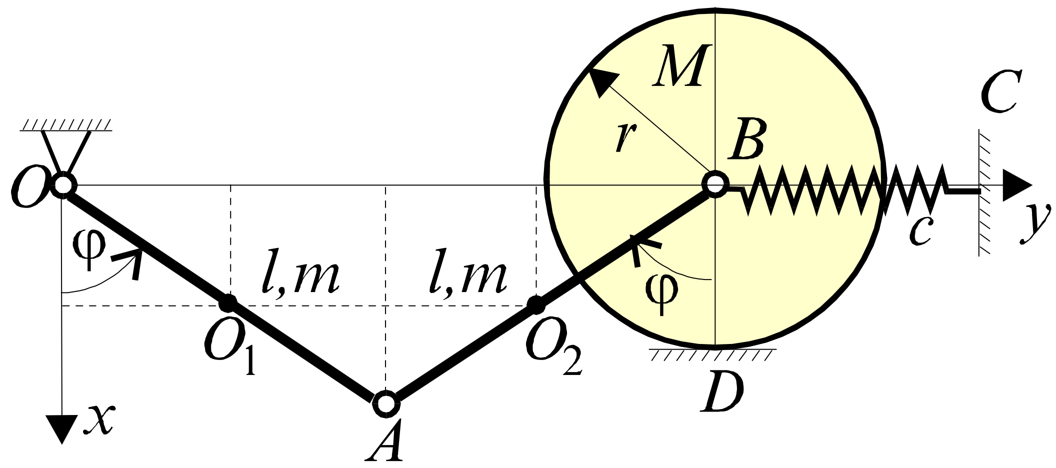


$$E = E_1 + E_2 + E_k = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} m l^2 \left(4 + 24\cos^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + 3Ml^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{3} m l^2 + \left(m + 3M\right) l^2 \cos^2\varphi\right]\dot{\varphi}^2 .$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \left[2\left(2m + 6M\right) l^2 \cos\varphi\left(-\sin\varphi\right)\dot{\varphi}\right]\dot{\varphi} + \left[\frac{2}{3} m l^2 + \left(2m + 6M\right) l^2 \cos^2\varphi\right]\ddot{\varphi} =$$

$$= -4\left(m + 3M\right) l^2 \cos\varphi \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \left[\frac{2}{3} m l^2 + \left(2m + 6M\right) l^2 \cos^2\varphi\right]\ddot{\varphi} .$$



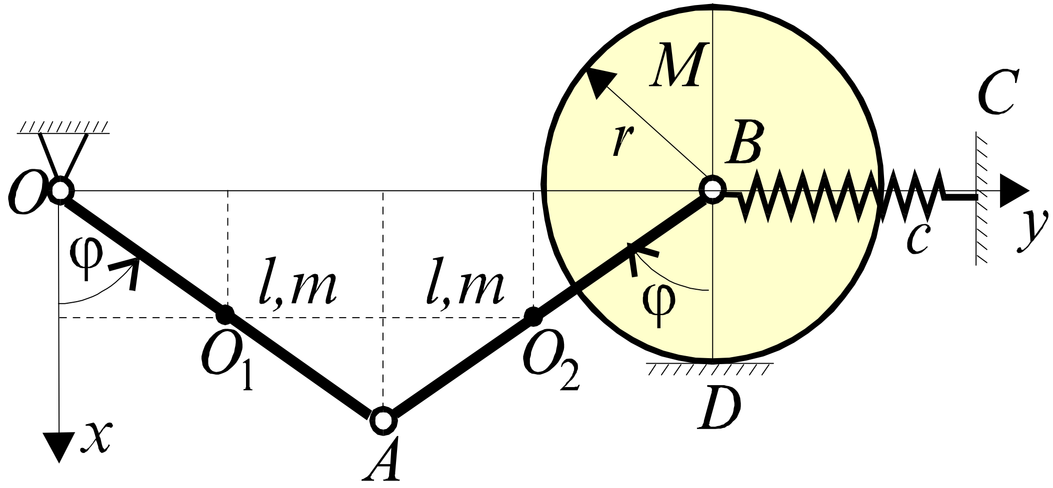
$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \left(m+3M\right)l^2 2\cos\varphi\left(-\sin\varphi\right)\cdot\dot{\varphi}^2 = -2\left(m+3M\right)l^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2$$

Równanie Lagrange'a

$$\left[\frac{2}{3}ml^2 + \left(2m+6M\right)l^2\cos^2\varphi\right]\ddot{\varphi} - 2\left(m+3M\right)l^2\sin 2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + \left(m+3M\right)l^2\sin 2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 =$$

$$= -mgl\sin\varphi - 2cl^2\sin 2\varphi$$

Dla małych kątów



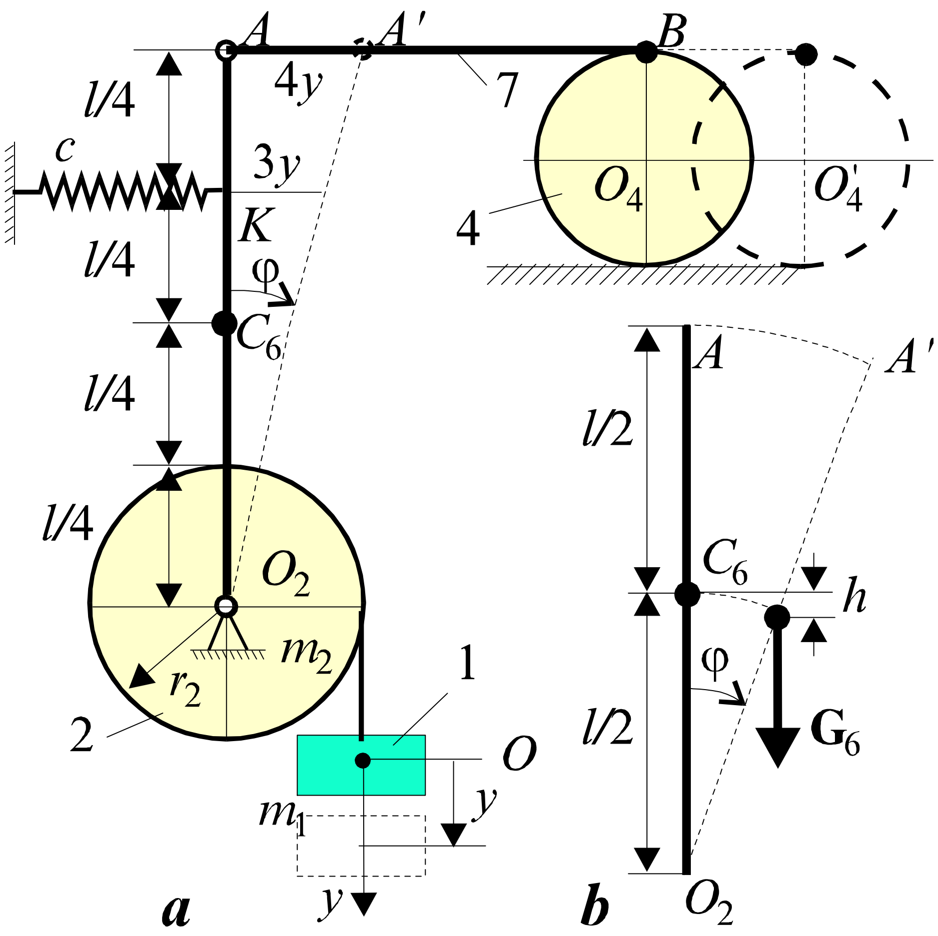
$$\sin\varphi \approx \varphi,\ \ \sin 2\varphi \approx 2\varphi,\ \ \cos\varphi \approx 1$$

$$\left[\frac{8}{3}m + 6M\right]l^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi + 4cl^2\varphi = 0 \ \rightarrow\ \left(\frac{8}{3}m + 6M\right)l^2\ddot{\varphi} + \left(mgl + 4cl^2\right)\varphi = 0 \ \rightarrow$$

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \quad k^2 = \frac{3mg + 12cl}{\left(8m + 18M\right)l}.$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{2\left(4m + 9M\right)l}{3mg + 12cl}}$$

Przykad. Analiza drgań swobodnych układu mechanicznego o jednym stopniu swobody.



Układ ma jeden stopień swobody

Współrzędna uogólniona - małe przemieszczenie *y* ciężaru *1*:

$$y \sim q_1$$

Po przemieszczeniu ciężaru 1 o *y* blok 2 obróci się o kąt $\varphi = y/r_2 = 4y/l$

Punkt zaczepienia sprężyny *K* przemieści się o $x_K \approx \varphi \cdot (3l/4) = 4y/l \cdot 3l/4 = 3y$

Punkt *A* przemieści się o $x_A \approx 4y$

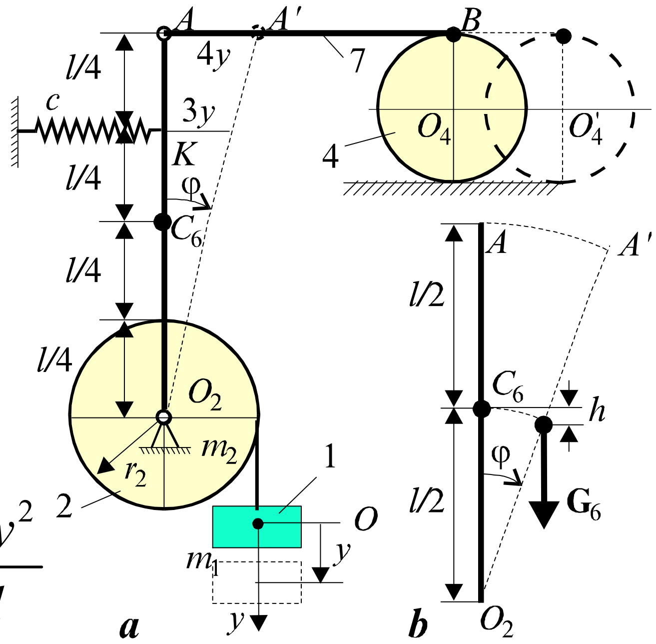
Punkt *B* przemieści się o $x_B \approx 4y$

Punkt *C* przemieści się o

$$x_{C_6} \approx 2y,\ \ y_{C_6} = h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{l}{2}(1-\cos\varphi)$$

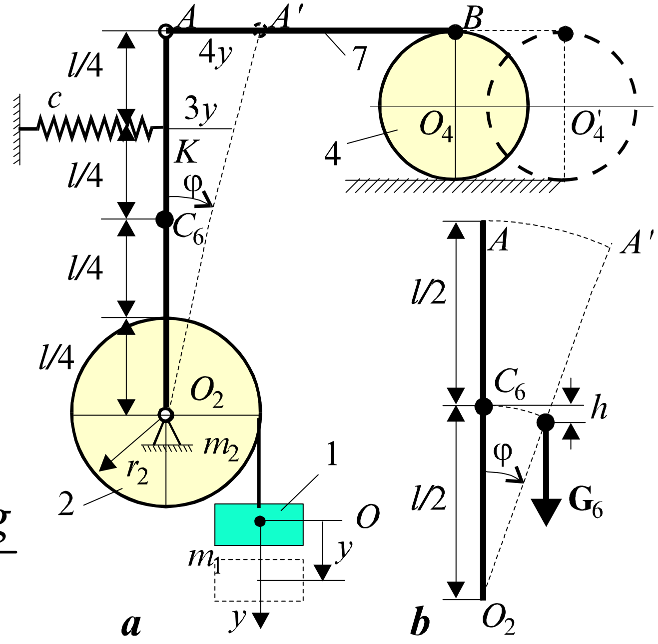
$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \quad (n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)$$

$$x_{C_6} \approx 2y,\ \ y_{C_6} = h \approx \frac{l}{2}\left(1 - 1 + \frac{\varphi^2}{2}\right) = \frac{l\varphi^2}{4} = \frac{l}{4}\left(\frac{4y}{l}\right)^2 = \frac{4y^2}{l}$$



Równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial E}{\partial y}=Q_y=\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial y}$$



W położeniu równowagi statycznej

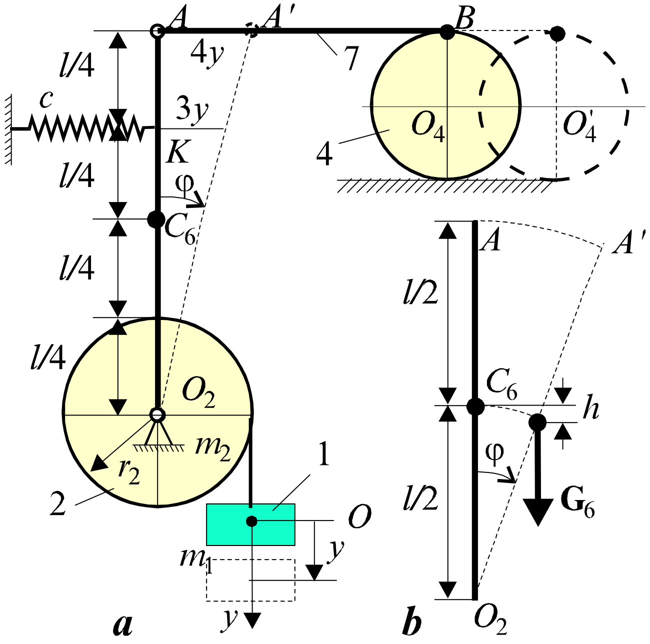
$$y=0 \quad Q_y=0 \quad 0=m_1 g-3c\lambda_{st} \rightarrow \lambda_{st}=\frac{m_1 g}{3c}$$

$$U=U_1+U_6+U_{sp}=m_1 g y+m_6 g h-\frac{1}{2}c\left(\lambda_{st}+x_K\right)^2=m_1 g y+m_6 g\frac{4y^2}{l}-\frac{1}{2}c\left(\lambda_{st}+3y\right)^2$$

$$Q_y=\frac{\partial U}{\partial y}=m_1 g+m_6 g\frac{8y}{l}-3c\left(\lambda_{st}+3y\right)=m_1 g+m_6 g\frac{8y}{l}-9cy-3c\lambda_{st}$$

$$Q_y=m_1 g+m_6 g\frac{8y}{l}-9cy-3c\frac{m_1 g}{3c}=m_6 g\frac{8y}{l}-9cy=\left(m_6 g\frac{8}{l}-9c\right)y$$

Energia kinetyczna



$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} I_{2O_2} \dot{\varphi}^2 \qquad \omega_2 = \dot{\varphi} = \left(\frac{\dot{y}}{r_2}\right) \qquad I_{2O_2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

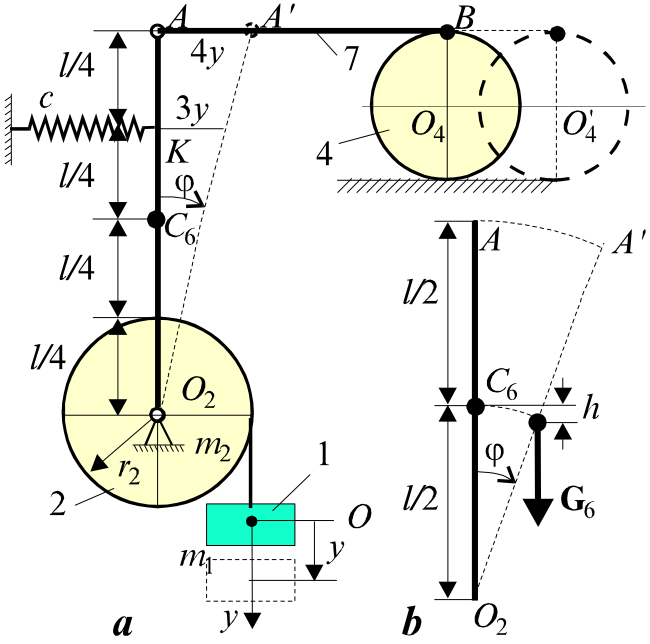
$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \cdot \left(\frac{\dot{y}}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{4} m_2 \dot{y}^2$$

$$E_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{O_4}^2 + \frac{1}{2} I_{4O_4} \omega_4^2 = \frac{1}{2} m_4 \cdot (2\dot{y})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_4 r_4^2 \left(\frac{2\dot{y}}{r_4}\right)^2 = 2 m_4 \dot{y}^2 + m_4 \dot{y}^2 = 3 m_4 \dot{y}^2.$$

$$\omega_4 = \frac{v_{O_4}}{r_4} = \frac{v_B}{2r_4} \approx \frac{v_A}{2r_4} = \frac{1}{2r_4} \frac{d}{dt}(4y) = \frac{2\dot{y}}{r_4}$$

Pręt 6 porusz się ruchem obrotowym względem środka O_2 z prędkością kątową

$$\omega_2 = \dot{\varphi}$$



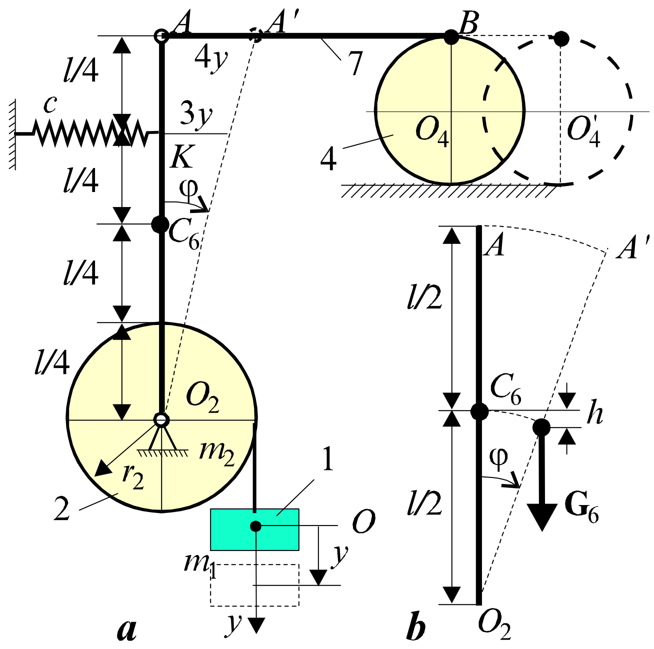
$$E_6 = \frac{1}{2} I_{6O_2} \dot{\varphi}^2 \qquad I_{6O_2} = \frac{1}{3} m_6 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_6 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{4}{3} m_6 \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m_6 l^2$$

$$E = E_1 + E_2 + E_4 + E_6 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{y}^2 + 3 m_4 \dot{y}^2 + \frac{8}{3} m_6 \dot{y}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + 6 m_4 + \frac{16}{3} m_6 \right) \dot{y}^2$$

Masa zredukowana

$$m = m_1 + \frac{1}{2} m_2 + 6 m_4 + \frac{16}{3} m_6$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{y}} = \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + 6m_4 + \frac{16}{3} m_6 \right) \dot{y}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) = \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + 6m_4 + \frac{16}{3} m_6 \right) \ddot{y}$$

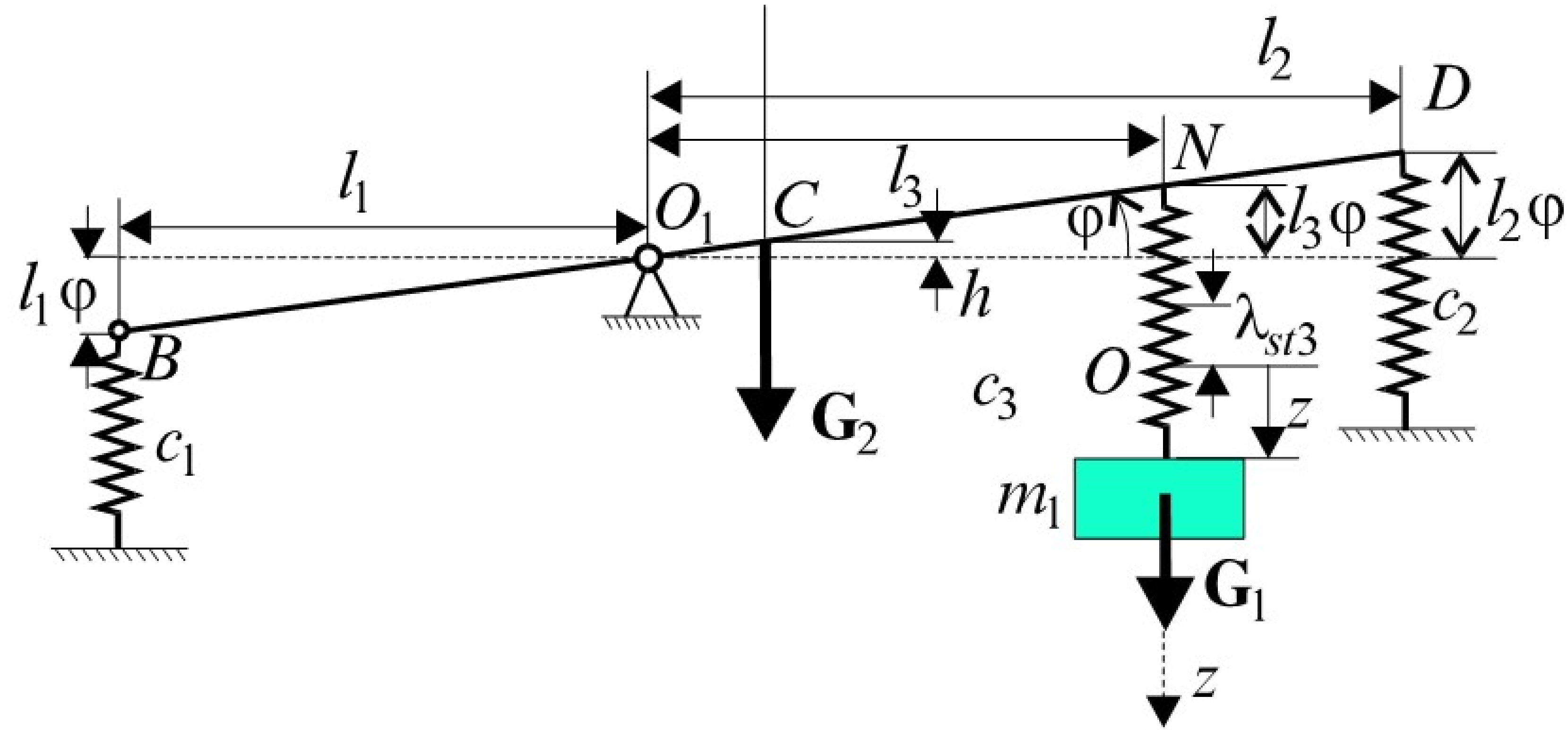
$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0$$

$$\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + 6m_4 + \frac{16}{3} m_6 \right) \ddot{y} - 0 = \left(m_6 g \frac{8}{l} - 9c \right) y \rightarrow$$

$$\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + 6m_4 + \frac{16}{3} m_6 \right) \ddot{y} - \left(m_6 g \frac{8}{l} - 9c \right) y = 0$$

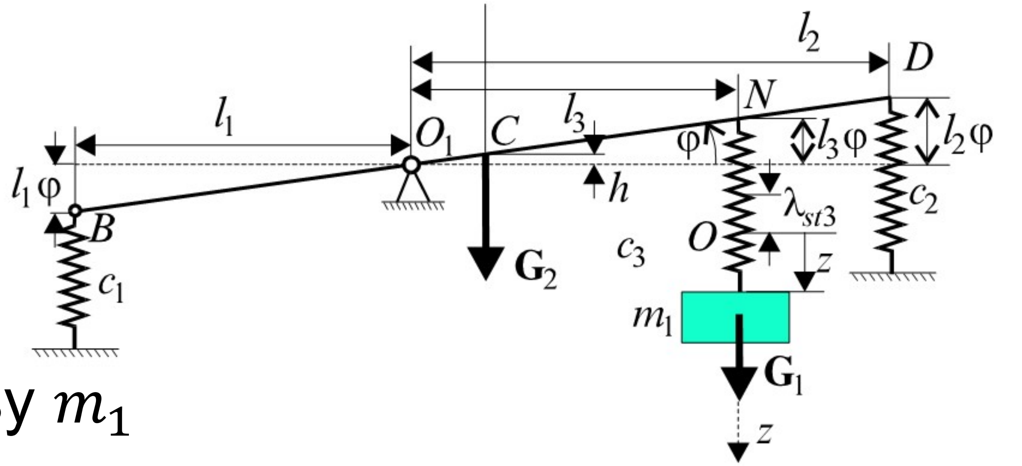
$$\ddot{y} + k^2 y = 0 \qquad k^2 = \frac{9cl - 8m_6 g}{l\left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + 6m_4 + \frac{16}{3} m_6 \right)}$$

Przykład: Analiza drgań swobodnych układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody



Wyznaczyć częstości i okresy małych swobodnych drgań układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody. Siły oporu, masy sprężyn oraz momenty bezwładności skręcanych wałów pominąć.

Współrzędne uogólnione



$z \sim q_1$ – przemieszczenie masy m_1

$\varphi \sim q_2$ - kąt obrotu dźwigni BD

Warunki początkowe

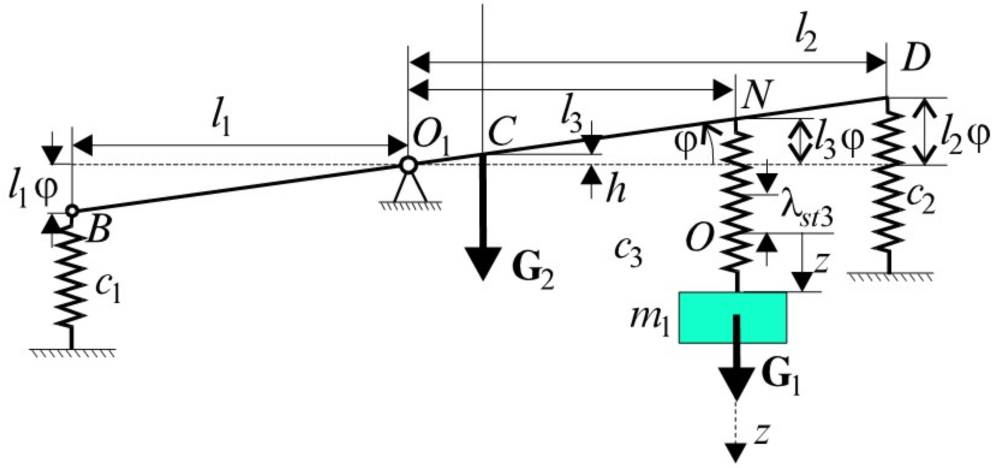
$$z\big|_{t=t_0=0} \equiv z_0, \quad \dot{z}\big|_{t=t_0=0} = v_0 \equiv \dot{z}_0;$$

$$\varphi\big|_{t=t_0=0} \equiv \varphi_0, \quad \dot{\varphi}\big|_{t=t_0=0} = \omega_0 \equiv \dot{\varphi}_0.$$

Przemieszczenia pionowe punktów zaczepienia sprężyn i środka masy dźwigni:

$$z_B = l_1\varphi,\ z_D = -l_2\varphi,\ z_N = -l_3\varphi,\ z_C = -h = -O_1C\cdot\varphi = -d\cdot\varphi = \left(\frac{l_1+l_2}{2} - l_1\right)\varphi = -\frac{l_2-l_1}{2}\varphi$$

Wszystkie działające na układ siły są potencjalne (zachowawcze). Dlatego równania Lagrange'a ruchu mają postać



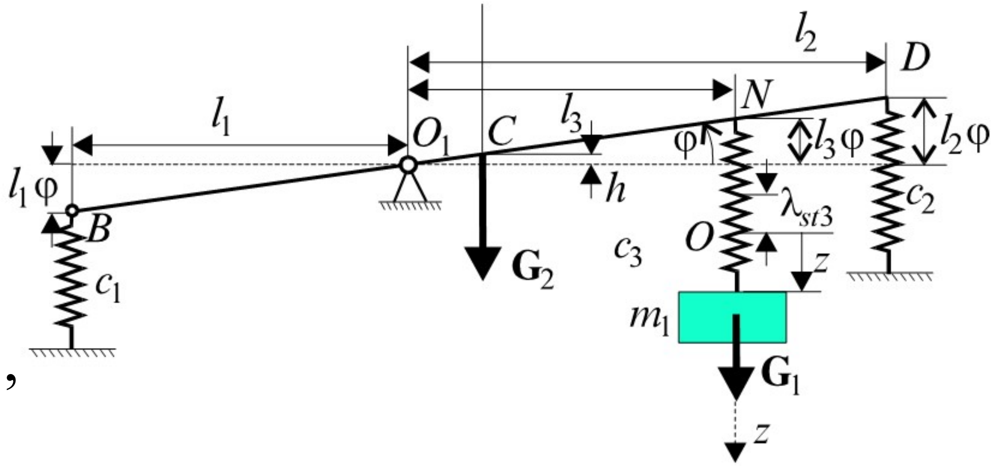
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial E}{\partial z}=Q_z=\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{\partial V}{\partial z},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial E}{\partial \varphi}=Q_\varphi=\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Potencjał

$$U=U_1+U_{c1}+U_{c2}+U_{c3}=m_1 g(z-z_N)+m_2 g z_C-$$
$$-\frac{1}{2}c_1\left(l_1\varphi\pm\lambda_{st1}\right)^2+\frac{1}{2}c_1\lambda_{st1}^2-\frac{1}{2}c_2\left(l_2\varphi\pm\lambda_{st2}\right)^2+\frac{1}{2}c_2\lambda_{st2}^2-\frac{1}{2}c_3\left(l_3\varphi+\lambda_{st3}+z\right)^2+\frac{1}{2}c_3\lambda_{st3}^2.$$

Znak górny, gdy sprężyny 1 i 2 są w położeniu równowagi statycznej rozciągnięte i dolny w przeciwnym przypadku.

Siły uogólnione



$$Q_z = \frac{\partial U}{\partial z} = m_1 g - c_3\left(l_3\varphi + \lambda_{st3} + z\right),$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -c_1\left(l_1\varphi \pm \lambda_{st1}\right)l_1 - c_2\left(l_2\varphi \pm \lambda_{st2}\right)l_2 - c_3\left(l_3\varphi + \lambda_{st3} + z\right)l_3.$$

W położeniu równowagi statycznej

$z = 0, \varphi = 0$ i $Q_z = 0, Q_\varphi = 0$

$$\Downarrow$$

$$0 = m_1 g - c_3\lambda_{st3} \;\rightarrow\; \lambda_{st3} = \frac{m_1 g}{c_3},$$

$$0 = \mp c_1\lambda_{st1}l_1 \mp c_2\lambda_{st2}l_2 - c_3\lambda_{st3}l_3 = \mp c_1\lambda_{st1}l_1 \mp c_2\lambda_{st2}l_2 - m_1 g l_3 \;\rightarrow\; \lambda_{st2} = \frac{\mp c_1\lambda_{st1}l_1 - m_1 g l_3}{\pm c_2 l_2} = -\frac{c_1 l_1}{c_2 l_2}\lambda_{st1} \mp \frac{m_1 g l_3}{c_2 l_2}$$

$$Q_z=\frac{\partial U}{\partial z}=m_1g-c_3\left(l_3\varphi+\frac{m_1g}{c_3}+z\right)=m_1g-c_3l_3\varphi-m_1g-c_3z=-c_3\left(z+l_3\varphi\right),$$

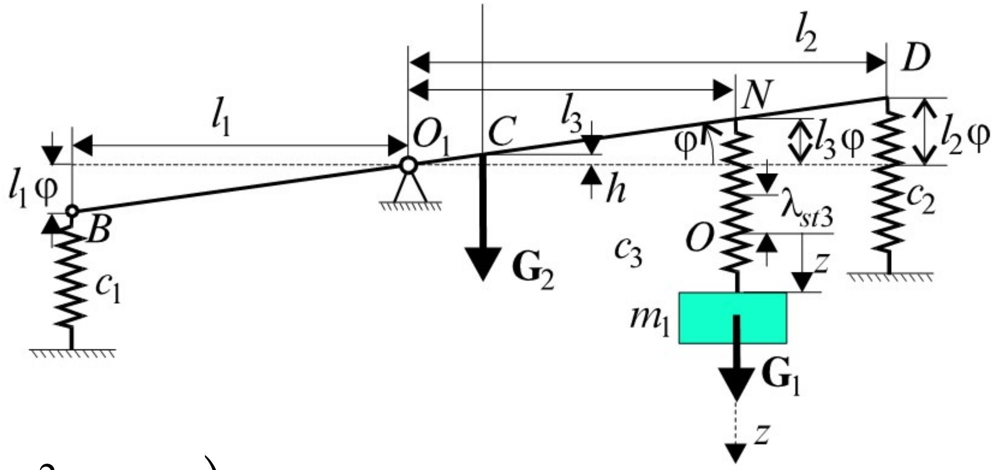
$$Q_\varphi=\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-c_1l_1\left(l_1\varphi\pm\lambda_{st1}\right)-c_2l_2\left(l_2\varphi\pm\left[-\frac{c_1l_1}{c_2l_2}\lambda_{st1}\mp\frac{m_1gl_3}{c_2l_2}\right]\right)-c_3l_3\left(l_3\varphi+\frac{m_1g}{c_3}+z\right)=$$

$$=-c_1l_1^2\varphi\underline{\mp c_1\lambda_{st1}l_1}-c_2l_2^2\varphi\underline{\pm c_1l_1\lambda_{st1}}\underline{\underline{+m_1gl_3}}-c_3l_3^2\varphi\underline{\underline{-m_1gl_3}}-c_3l_3z=$$

$$=-c_1l_1^2\varphi-c_2l_2^2\varphi-c_3l_3^2\varphi-c_3l_3z=-\left(c_1l_1^2+c_2l_2^2+c_3l_3^2\right)\varphi-c_3l_3z.$$

Energia kinetyczna

$$E=E_1+E_{BD}=\frac{1}{2}m_1\dot{z}^2+\frac{1}{6}m_2\left(l_1^2+l_2^2-l_1l_2\right)\dot{\varphi}^2$$

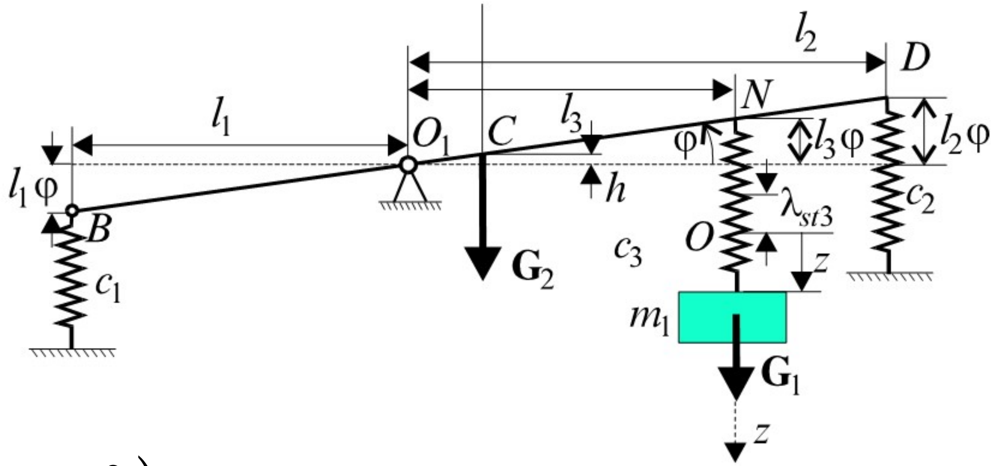


$$\frac{\partial E}{\partial \dot{z}} = m_1 \dot{z}, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m_2 \left(l_1^2 + l_2^2 - l_1 l_2 \right) \dot{\varphi} = I_{O_1} \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{z}} \right) = m_1 \ddot{z}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{3} m_2 \left(l_1^2 + l_2^2 - l_1 l_2 \right) \ddot{\varphi} = I_{O_1} \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$$

Równania Lagrange'a



$$m_1\ddot{z} - 0 = -c_3\left(z + l_3\varphi\right),$$

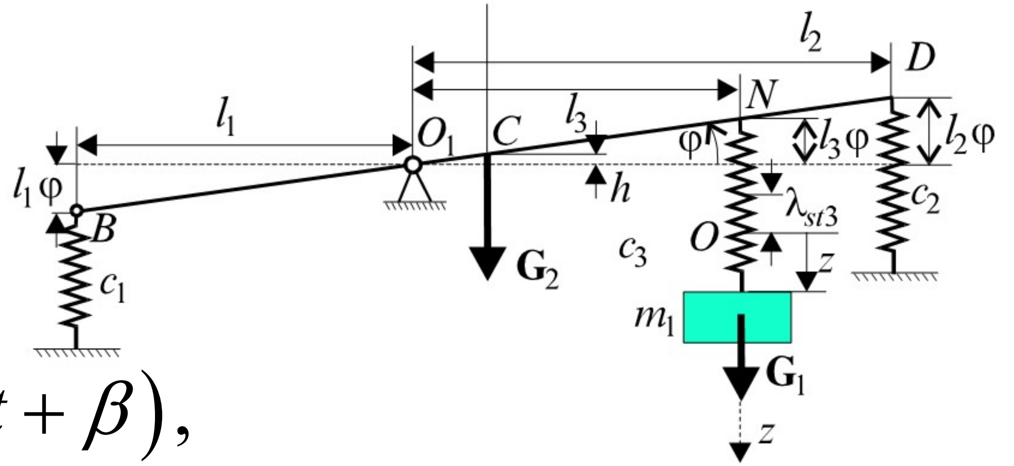
$$I_{O_1}\ddot{\varphi} - 0 = -\left(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2\right)\varphi - c_3 l_3 z$$

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi &= 0, \\ a_{22}\ddot{\varphi} + c_{21}z + c_{22}\varphi &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

$$a_{11} = m_1,\ c_{11} = c_3,\ \ c_{12} = c_3 l_3,$$

$$a_{22} = I_{O_1},\ \ c_{22} = \left(c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2\right),\ \ c_{21} = c_{12} = c_3 l_3,$$

Rozwiązanie szczególne układu tych dwóch równań różniczkowych poszukujemy w postaci:



$$z = a_1 \sin\left(kt + \beta\right),$$

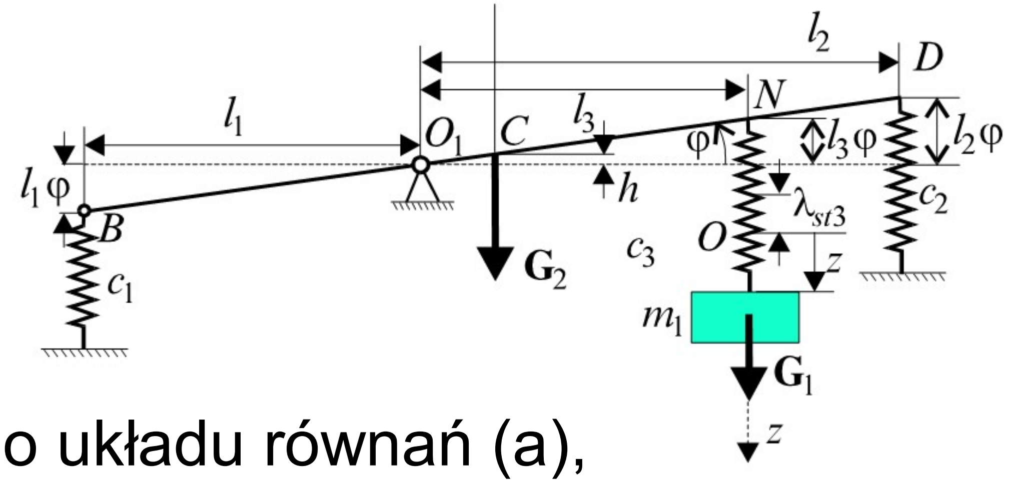
$$\varphi = a_2 \sin\left(kt + \beta\right),$$

Wprowadzając $\dfrac{\varphi}{z} = \dfrac{a_2}{a_1} \equiv \mu$ otrzymujemy

$$z = a_1 \sin\left(kt + \beta\right),$$

$$\varphi = \mu z = \mu a_1 \sin\left(kt + \beta\right). \qquad \text{(b)}$$

μ - współczynnik dystrybucji

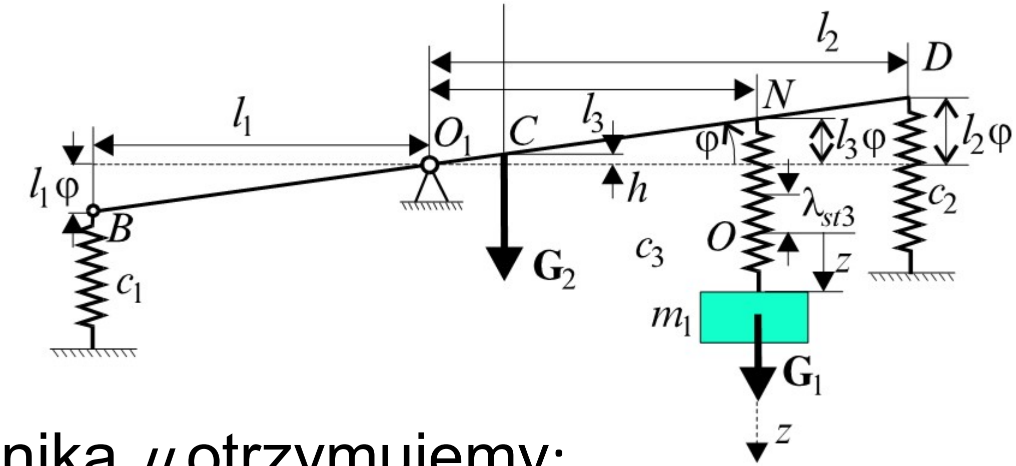


Po podstawieniu wzorów (b) do układu równań (a), otrzymujemy

$$\left(-a_{11}a_1k^2+c_{11}a_1+c_{12}\mu a_1\right)\sin\left(kt+\beta\right)=0,$$

$$\left(-a_{22}\mu a_1k^2+c_{21}a_1+c_{22}\mu a_1\right)\sin\left(kt+\beta\right)=0.$$

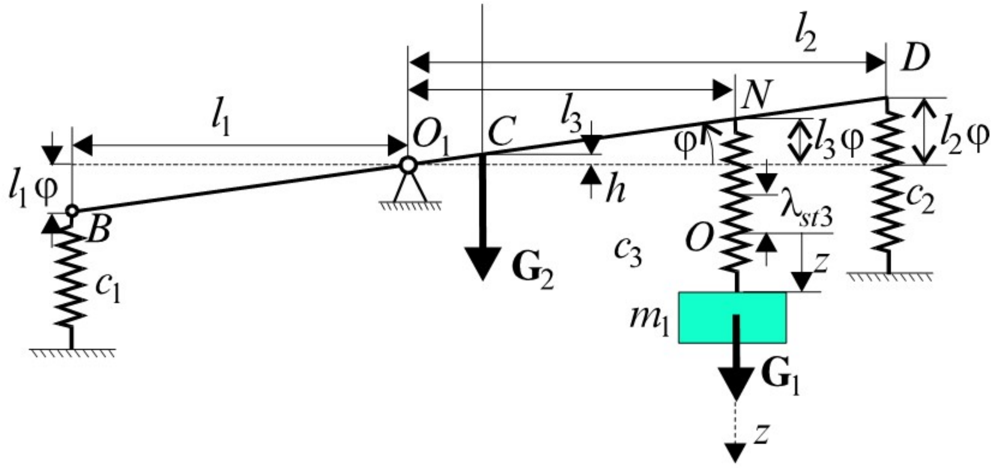
$$\begin{cases}\left(-a_{11}k^2+c_{11}+c_{12}\mu\right)a_1=0,\\ \left(-a_{22}\mu k^2+c_{21}+c_{22}\mu\right)a_1=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-a_{11}k^2+c_{11}+c_{12}\mu=0,\\ -a_{22}\mu k^2+c_{21}+c_{22}\mu=0.\end{cases}$$



Po wyrugowaniu współczynnika μ otrzymujemy:

$$\begin{cases} -a_{11}k^2 + c_{11} + c_{12}\mu = 0 \\ -a_{22}\mu k^2 + c_{21} + c_{22}\mu = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{a_{11}k^2 - c_{11}}{c_{12}} \\ c_{21} + \mu\left(c_{22} - a_{22}k^2\right) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

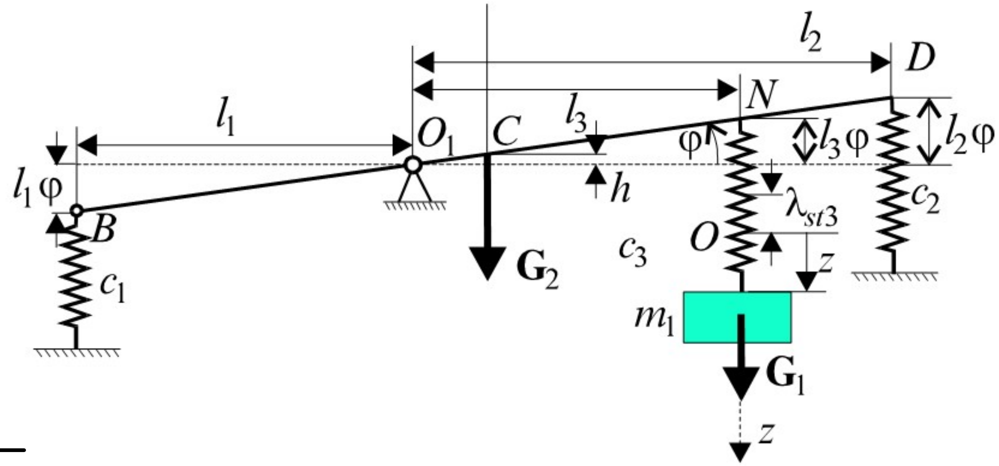
$$c_{21} + \frac{\left(a_{11}k^2 - c_{11}\right)}{c_{12}}\left(c_{22} - a_{22}k^2\right) = 0 \rightarrow \left(c_{11} - a_{11}k^2\right)\left(c_{22} - a_{22}k^2\right) - c_{12}^2 = 0.$$



$$a_{11}a_{22}k^4 - \left(c_{11}a_{22} + c_{22}a_{11}\right)k^2 + \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right) = 0$$

$$m_1 I_{O_1} k^4 - \left(c_3 I_{O_1} + \left[c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2\right] m_1\right)k^2 + \left(c_3\left[c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2\right] - c_3^2 l_3^2\right) = 0$$

Równanie charakterystyczne



$$\mu = \frac{a_{11}k^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{12}}{a_{22}k^2 - c_{22}}$$

$$\mu_1 = \frac{a_{11}k_1^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{12}}{a_{22}k_1^2 - c_{22}} = \frac{m_1k_1^2 - c_3}{c_3l_3} = \frac{c_3l_3}{I_{O_1}k_1^2 - \left(c_1l_1^2 + c_2l_2^2 + c_3l_3^2\right)},$$

$$\mu_2 = \frac{a_{11}k_2^2 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{12}}{a_{22}k_2^2 - c_{22}} = \frac{m_1k_2^2 - c_3}{c_3l_3} = \frac{c_3l_3}{I_{O_1}k_2^2 - \left(c_1l_1^2 + c_2l_2^2 + c_3l_3^2\right)}.$$

Twierdzenie o zmianie całkowitej energii mechanicznej układu holonomicznego

Więzy, które ograniczają tylko przemieszczenia (a nie prędkości) układu punktów materialnych nazywane są więzami **holonomicznymi** lub **geometrycznymi**. Równania i nierówności takich więzów nie zawierają pochodnych współrzędnych punktów względem czasu.

$$f_\kappa\left(x_j, y_j, z_j, t\right) = 0 \quad (j = 1 \ldots N, \kappa = 1 \ldots k)$$

Na holonomiczny układ materialny, na który są nałożone więzy idealne działają siły czynne potencjalne z potencjałem

$$U = U\left(q_1, q_2, \ldots, q_s; t\right)$$

oraz siły czynne niepotencjalne Q^*

Energia kinetyczna we współrzędnych uogólnionych

$$E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu^2$$

$$x_\nu = x_\nu\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right) \;\; (\nu = 1...3N)$$

$$\dot{x}_\nu = \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial q_p}{\partial t} + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \equiv \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\dot{q}_p + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \;\; (\nu = 1...3N),$$

$$\left(\dot{x}_\nu\right)^2 = \left(\sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\dot{q}_p + \frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2 = \sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}\dot{q}_p\dot{q}_r + 2\sum_{p=1}^{s} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\dot{q}_p + \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2 \;\; (\nu = 1...3N).$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}\dot{q}_p\dot{q}_r \underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}}_{a_{pr}} + \sum_{p=1}^{s}\dot{q}_p \underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}}_{b_p} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2}_{c}.$$

$$E=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}\dot{q}_p\dot{q}_r\underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r}}_{a_{pr}}+\sum_{p=1}^{s}\dot{q}_p\underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t}}_{b_p}+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2}_{c}.$$

$$a_{pr}\equiv a_{pr}(q;t)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r},\ \ b_p\equiv b_p(q;t)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t},\ \ c\equiv c(q;t)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2$$

$$E=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}a_{pr}\dot{q}_p\dot{q}_r+\sum_{p=1}^{s}b_p\dot{q}_p+\frac{1}{2}c\equiv E_2+E_1+E_0,$$

$$E_2=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}a_{pr}\dot{q}_p\dot{q}_r,\ \ E_1=\sum_{p=1}^{s}b_p\dot{q}_p,\ \ E_0=\frac{1}{2}c.$$

W przypadku więzów skleronomicnych energia kinetyczna jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych

$$E=E_2=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}a_{pr}(q)\dot{q}_p\dot{q}_r$$

Energia kinetyczna we współrzędnych uogólnionych

$$E=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}a_{pr}\dot{q}_p\dot{q}_r+\sum_{p=1}^{s}b_p\dot{q}_p+\frac{1}{2}c\equiv E_2+E_1+E_0,$$

$$E_2=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s}a_{pr}\dot{q}_p\dot{q}_r,\;\; E_1=\sum_{p=1}^{s}b_p\dot{q}_p,\;\; E_0=\frac{1}{2}c.$$

$$a_{pr}\equiv a_{pr}\left(q;t\right)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_r},\;\; b_p\equiv b_p\left(q;t\right)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_p}\frac{\partial x_\nu}{\partial t},\;\; c\equiv c\left(q;t\right)=\sum_{\nu=1}^{3N}m_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t}\right)^2$$

Całkowita energia mechaniczna

$$\mathbf{E} = E + V = E - U$$

Twierdzenie o zmianie całkowitej energii mechanicznej układu holonomicznego. Pochodna materialna **całkowitej energii mechanicznej układu**

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} \equiv \frac{d\left(E+V\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_1 + 2E_0\right) + \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial t} + P^*,$$

$$P^* = \sum_{i=1}^{s} Q_i^* \dot{q}_i .$$

P^* - moc sił niepotencjalnych

Szczególne przypadki

1. Układ skleronomiczny

$$E = E_2 \quad (E_1 = 0, E_2 = 0), \quad \partial E / \partial t = 0$$

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} \equiv \frac{d\left(E + V\right)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + P^*$$

2. Układ skleronomiczny – pole sił jest polem zachowawczym, a potencjały nie zależą od czasu.

$$U = U\left(q_1, q_2, ..., q_s\right) \qquad V = V\left(q_1, q_2, ..., q_s\right)$$

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = P^*$$

3. Układ skleronomiczny - działają tylko siły zachowawcze

$$P^{*} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} \equiv \frac{d\left(E+V\right)}{dt} = P^{*} = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{E} \equiv E+V = E-U = h = \mathrm{const}$$

Zasada zachowania całkowitej energii mechanicznej układu: jeżeli na skleronomiczno-holonomiczny układ, na który nałożone są więzy idealne działają tylko siły zachowawcze, to całkowita energia mechaniczna układu jest stała.

Def. Funkcja jednorodna stopnia k

$$\varphi(\lambda q_1, \dots, \lambda q_n) = \lambda^k \varphi(q_1, \dots, q_n)$$

T**wierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych:** Dla funkcji jednorodnej $\varphi(q_1, \dots, q_n)$ stopnia k

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \varphi\left(q_1, q_2, \dots, q_n\right)}{\partial q_i} q_i = k\varphi\left(q_1, q_2, \dots, q_n\right)$$

Siły żyroskopowe

Żyroskopowe siły – siły, dla których moc jest zawsze równa zeru

$$P^* = 0$$

Przykładem siły żyroskopowej może być każda siła, prostopadła do kierunku ruchu, np. siła ciężkości dla poruszającego się poziomo ciała.

Z zasady zachowania całkowitej energii mechanicznej

$$T \equiv E + V = E - U = h = \text{const}$$

Rozważmy siły niepotencjalne, proporcjonalne do prędkości uogólnionych

$$Q_i^* = \sum_{j=1}^{s} g_{ij}\dot{q}_j \quad (i = 1 \ldots s)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby określone wzorem siły niepotencjalne, były żyroskopowymi jest antysymetryczność macierzy g_{ij}

$$g_{ii} = 0 \;\; (i = 1 \ldots s), \;\; g_{ij} = -g_{ji} \;\; (i, j = 1 \ldots s; i \neq j)$$

$$P^* = \sum_{i=1}^{s} Q_i^* \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g_{ij}\dot{q}_j\dot{q}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g_{ij}\dot{q}_j\dot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g_{ij}\underbrace{\dot{q}_i\dot{q}_j}_{\dot{q}_i \leftrightarrow \dot{q}_j} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g_{ij}\dot{q}_j\dot{q}_i + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j}_{i \leftrightarrow j} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g_{ij}\dot{q}_j\dot{q}_i + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{s} g_{ji}\dot{q}_j\dot{q}_i}_{\sum_J \leftrightarrow \sum_i} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g_{ij}\dot{q}_j\dot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g_{ji}\dot{q}_j\dot{q}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(g_{ij} + g_{ji}\right)\dot{q}_j\dot{q}_i \overset{(35)}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}(0)\dot{q}_j\dot{q}_i = 0.$$

Ważną właściwością sił żyroskopowych jest to, że przy więzach skleronomicznych **nie powodują zmian energii kinetycznej**

$$\frac{d\left(E+V\right)}{dt} = P^* \;\rightarrow\; \frac{dE}{dt} = 0 \;\rightarrow\; E = \mathrm{const}$$

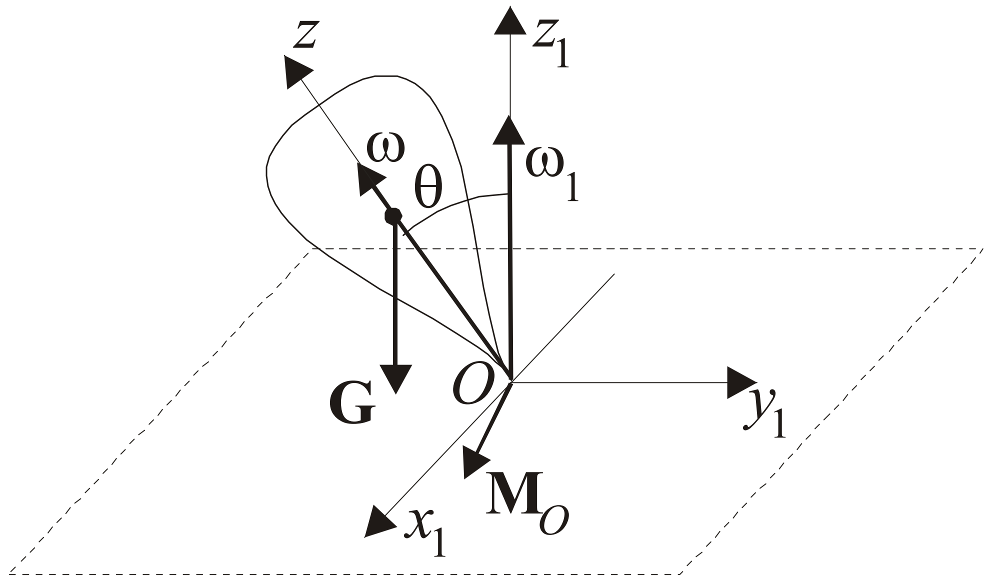
Wniosek 1. Praca sił żyroskopowych na przemieszczeniach rzeczywistych układu materialnego jest równa zeru.
Wniosek 2. Siły żyroskopowe nie rozpraszają energii mechanicznej układu. Mogą więc one występować w układach zachowawczych.

$$\frac{d\left(E+V\right)}{dt}=P^{*} \;\rightarrow\; \frac{dE}{dt}=0 \;\rightarrow\; E=\mathrm{const}$$

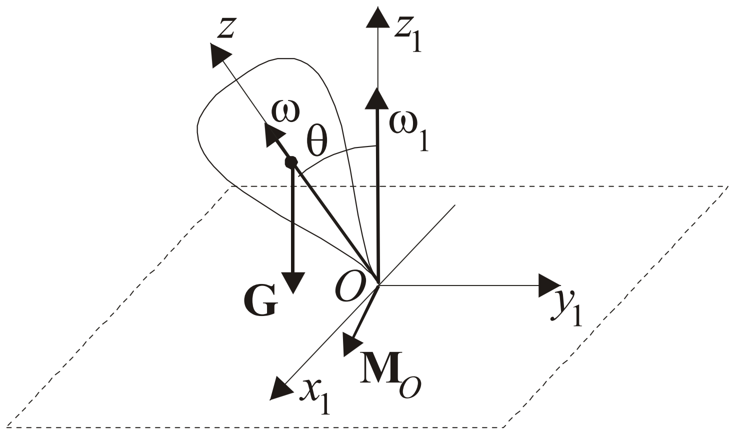
Przykład. Bąk o ciężarze G obraca się wokół własnej osi z prędkością kątową ω. Oś własna obraca się wokół pionowej osi z_1 z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}_1$. Jest to precesja regularna.

Z przybliżonej teorii żyroskopu

$$I_z\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}_1\right)=\mathbf{M}_O\equiv\mathrm{mom}_O\mathbf{G}$$



Siła ciężkości działająca prostopadle do kierunku ruchu bąka, jest siłą żyroskopową..



$$P^* = M^0 \circ \omega_1 = I_z(\omega \times \omega_1) \circ \omega_1 = 0 \qquad ((\omega \times \omega_1) \perp \omega_1)$$

Uogólniony potencjał i uogólniona energia potencjalna

potencjał uogólniony $U\left(q_p, \dot{q}_p; t\right)$

siła uogólniona

$$Q_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1 \ldots s)$$

potencjalna energia uogólniona

$$V\left(q_p, \dot{q}_p; t\right) = -U\left(q_p, \dot{q}_p; t\right)$$

$$Q_i = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial t} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + f_i\left(\dot{q}_p, q_p; t\right) \quad (i = 1 \ldots s)$$

Jeżeli siły nie zależą od prędkości, to

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0$$

i potencjał uogólniony może być funkcją liniową tylko prędkości uogólnionych

$$U\left(q_p, \dot{q}_p; t\right) = U_0\left(q_p; t\right) + \sum_{j=1}^{s} u_j\left(q_p; t\right) \dot{q}_j$$

Ponieważ

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

to

$$Q_i = -\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(U_0\left(q_p;t\right) + \sum_{j=1}^{s} u_j\left(q_p;t\right)\dot{q}_j \right) = -\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial q_i} + \sum_{m=1}^{s}\left(\frac{\partial u_j}{\partial q_i} - \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \right)\dot{q}_j =$$

$$= \frac{\partial U_1\left(q_p;t\right)}{\partial q_i} + \sum_{m=1}^{s} g_{ij}\left(q_p;t\right)\dot{q}_j .$$

$$\sum_{m=1}^{s} g_{ij}\left(q_p;t\right)\dot{q}_j$$ siły żyroskopowe

Przykład. Wykazać, że siły bezwładności Coriolisa w układzie mechanicznym, na które są nałozone więzy skleronomiczne, są siłami żyroskopowymi.

Rozpatrujemy punkt materialny o masie m poruszający się z prędkością v w układzie nieinercyjnym. Układ ten porusza się względem układu nieruchomego z prędkością kątową ω. Wyznaczamy siłę bezwładności Coriolisa

$$\boldsymbol{B} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$$

Pracę przygotowaną siły bezwładności Coriolisa można obliczyć, wykorzystując przemieszczenie przygotowane $\delta\boldsymbol{r}$

$$\delta W = B \circ \delta r = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) \circ \delta r = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) \circ \boldsymbol{v}\, dt = 0$$

Siły dyssypacyjne

$$\boxed{\frac{d\mathbf{E}}{dt} = P^*}$$

$$P^* \leq 0$$

Wniosek 1. Dla niepotencjalnych sił oporu (sił dyssypacyjnych), dla których moc jest niedodatnia całkowita energia mechaniczna układu zmniejsza się w czasie ruchu i dąży do zera Pod działaniem sił dyssypacyjnych całkowita energia mechaniczna układu rozprasza się.

Wniosek 2. W przypadku, gdy na układ mechaniczny działają siły dyssypacyjne, a takie siły w rzeczywistości zawsze występują, to jeżeli do układu nie jest doprowadzana energia mechaniczna za pomocą sił czynnych, to ruch układu mechanicznego wcześniej czy później ustanie. Niemożliwość istnienia perpetuum mobile.

Def. Symetryczną dodatnią formę kwadratową

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j > 0 \quad (\beta_{ij} = \beta_{ji})$$

określającą siły niepotencjalne

$$Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{j=1}^{s}\beta_{ij}\dot{q}_j \quad (i = 1 \ldots s)$$

nazywamy dyssypacyjną funkcją Rayleigha.

Zależność mocy sił dyssypacyjnych z wykorzystaniem dyssypacyjnej funkcji Rayleigha

$$P^* \equiv \sum_{i=1}^{s} Q_i^* \dot{q}_i = -\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = -\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i = -2R$$

Uwaga. Jeżeli na układ mechaniczny działają siły czynne potencjalne z potencjałem

$$U = U\left(q_1, q_2, ..., q_s; t\right)$$

oraz **siły dyssypacyjne** z funkcją Rayleigha i inne siły czynne niepotencjalne, to równania Lagrange'a są postaci

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_p} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^* \quad (p = 1 \ldots s) \quad \text{lub} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_p} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i^* \quad (p = 1 \ldots s).$$

Przykład. Wyprowadzić równania ruchu drgań wymuszonych układu holonomicznego o jednym stopniu swobody z wykorzystaniem równań Lagrange'a drugiego rodzaju, uwzględniając siły dyssypacyjne Rayleigha.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q \qquad Q=Q^{p}+Q^{R}+Q^{w}\left(t\right)$$

$Q^{p}=\dfrac{\partial U}{\partial q}$ uogólniona siła sprężysta

$Q^{R}=-\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}}$ uogólniona siła dyssypacyjna Rayleigha

$Q^{w}\left(t\right)=\dfrac{\delta ' W}{\delta q}$ uogólniona siła wymuszająca

$$E=\frac{m\dot{q}^2}{2}, U=-\frac{cq^2}{2}, R=\frac{\alpha\dot{q}^2}{2}, \delta' W=P\left(t\right)\delta q$$

Różniczkując otrzymujemy

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}=m\dot{q},\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)=m\ddot{q},\ \frac{\partial E}{\partial q}=0,\ Q^p=\frac{\partial U}{\partial q}=-cq,\ Q^R=-\frac{\partial R}{\partial \dot{q}}=-\alpha\dot{q},\ Q^w\left(t\right)=\frac{\delta' W}{\delta q}=P\left(t\right)$$

$$m\ddot{q}-0=-cq-\alpha\dot{q}+P\left(t\right)\ \text{lub}\ \ m\ddot{q}+\alpha\dot{q}+cq=P\left(t\right)$$

Równania kanoniczne Hamiltona

Funkcja Lagrange'a $L\left(\dot{q}_j, q_j, t\right)$

opisuje ruch układu materialnego holonomicznego w polu sił potencjalnych. Zależy ona od 2s+1 zmiennych

$$q_j, \dot{q}_j, t \qquad \left(j = 1 \ldots s\right)$$

nazywanymi zmiennymi Lagrange'a. Są one od siebie zależne, ponieważ współrzędne i prędkości uogólnione zależą od czasu $q_j = q_j\left(t\right), \dot{q}_j = \dot{q}_j\left(t\right)$

Wprowadzamy układ **parametrów (zmiennych) Hamiltona**

$$q_j, p_j, t$$

p_j **są pędami uogólnionymi**, które wyznaczamy z zależności

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j\left(\dot{q}_j, q_j, t\right) \; \left(j = 1 \ldots s\right)$$

Uwaga 1. Zmienne q_j, t w układach Lagrange'a oraz Hamiltona są takie same.

Uwaga 2. Uwzględniając równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \;\; \left(j = 1 \ldots s\right) \quad \text{oraz} \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j\left(\dot{q}_j, q_j, t\right) \;\; \left(j = 1 \ldots s\right)$$

otrzymujemy

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \;\; \left(j = 1 \ldots s\right)$$

Przekształcenie Legendre'a.

Rozpatrujemy funkcję $X = X\left(x_1, x_2, ..., x_s\right)$ zmiennych $x_1, x_2, ..., x_s$

oraz parametrów α_r dla której **hesian** względem $x_1, x_2, ..., x_s$

$$\det\left[\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^{s} \neq 0$$

jest różny od zera.

Wprowadzamy nowe zmienne $y_j = \dfrac{\partial X}{\partial x_j} \quad \left(j = 1 ... s\right)$

i nową funkcję $Y = Y\left(y_1, y_2, ..., y_s\right)$

$$Y = \sum_{j=1}^{s} y_j x_j - X$$

Zastosujemy przekształcenie Legendre'a do **funkcji Hamiltona** *H*, zakładając, że

$$H \sim Y, p_1, p_2, ..., p_s \sim y_1, y_2, ..., y_s;$$

$$X \sim L, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s \sim x_1, x_2, ..., x_s,$$

zmienne q_j, t są parametrami α_r

$$H\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$$

$$\dot{q}_j = f_j\left(q_i, p_i, t\right) \; \left(j, i = 1...s\right)$$

$$L = E + U = L_2 + L_1 + L_0 \quad \left(E = E_2 + E_1 + E_0\right)$$

$$L_2 = E_2 = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{s}\sum_{r=1}^{s} a_{pr}\dot{q}_p\dot{q}_r, \quad L_1 = E_1 = \sum_{p=1}^{s} b_p\dot{q}_p, \quad L_0 = E_0 + U = \frac{1}{2}c + U$$

$$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j\left(\dot{q}_j, q_j, t\right) \quad \left(j = 1 \ldots s\right)}$$

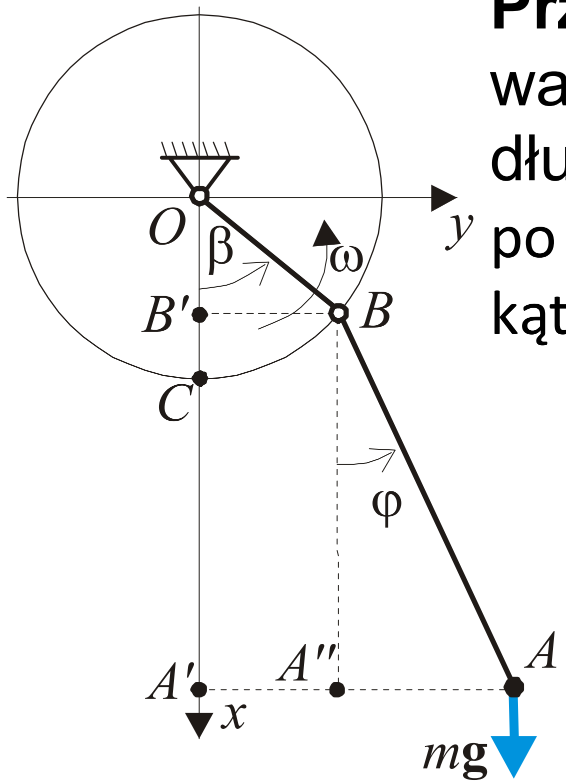
$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{r=1}^{s} a_{jr}\dot{q}_r + b_j \quad \left(j = 1 \ldots s\right)$$

Ponieważ wyznacznik tego układu równań liniowych

$$\left|a_{jr}\right| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_r}\right| = \left|\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_r}\right| \neq 0$$

to można go rozwiązać względem prędkości uogólnionych $\dot{q}_p$

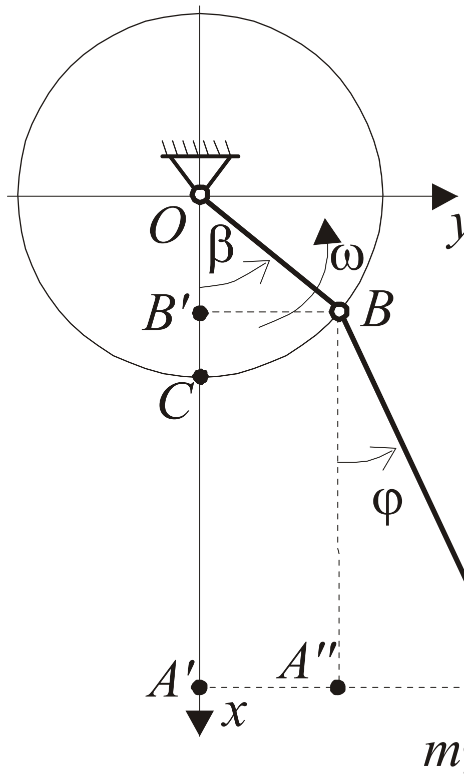
$$\dot{q}_r = \sum_{r=1}^{s} a_{jr}^{*} p_j + b_j^{*} \quad \left(j = 1 \dots s\right)$$



Przykład. Wyprowadzić funkcję Hamiltona dla wahadła matematycznego o masie m i długości l, którego punkt zawieszenia porucza się po okręgu o promieniu r ze stałą prędkością kątową ω.

W tym przypadku na wahadło nałożone są więzy idealne i reonomiczne. Układ ma jeden stopień swobody.

Za współrzędną uogólnioną przyjmujemy kąt $\varphi \sim q_1$



$$x_A = r\cos\beta + l\cos\varphi = r\cos\omega t + l\cos\varphi,$$

$$y_A = r\sin\beta + l\sin\varphi = r\sin\omega t + l\sin\varphi.$$

$$v_A^2 = v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = \left(-r\omega\sin\omega t - l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\right)^2 + \left(r\omega\cos\omega t + l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\right)^2 =$$

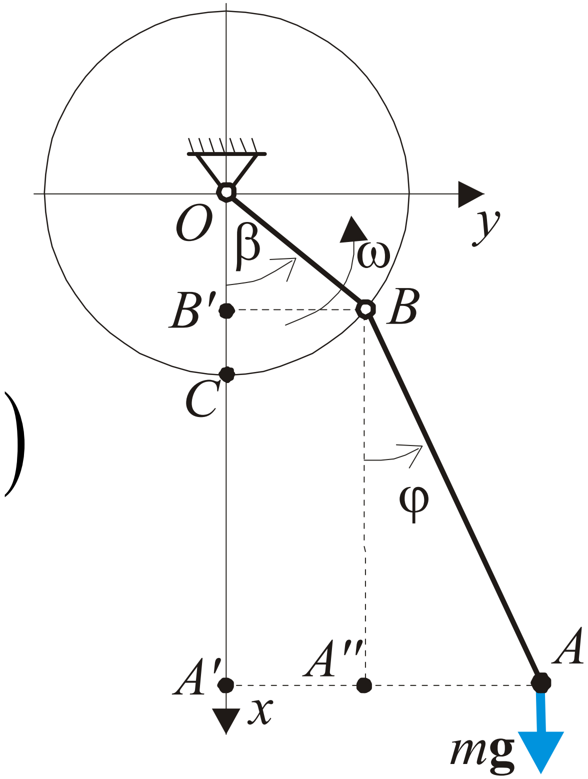
$$= r^2\omega^2\sin^2\omega t + 2r\omega\sin\omega t\cdot l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + l^2\sin^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 +$$

$$+ r^2\omega^2\cos^2\omega t + 2r\omega\cos\omega t\cdot l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + l^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 =$$

$$= r^2\omega^2 + 2r\omega l\dot{\varphi}\left(\sin\omega t\sin\varphi + \cos\omega t\cos\varphi\right) + l^2\dot{\varphi}^2 =$$

$$= r^2\omega^2 + 2r\omega l\dot{\varphi}\cos\left(\varphi - \omega t\right) + l^2\dot{\varphi}^2.$$

Energia kinetyczna

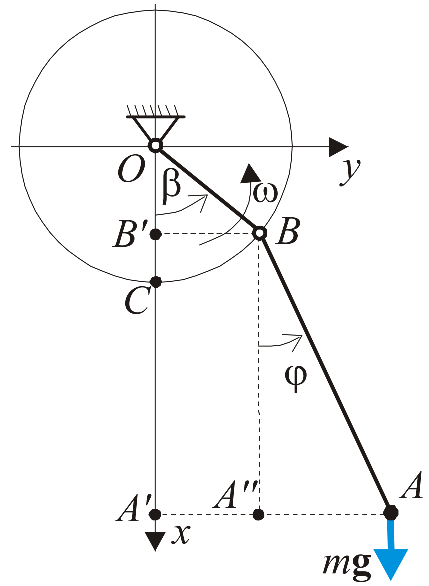


$$E = \frac{1}{2} m \left(r^2 \omega^2 + 2 r \omega l \dot{\varphi} \cos\left(\varphi - \omega t \right) + l^2 \dot{\varphi}^2 \right)$$

Potencjał siły ciężkości

$$U = mgx_A = mg\left(r \cos \omega t + l \cos \varphi \right)$$

Funkcja Lagrange'a

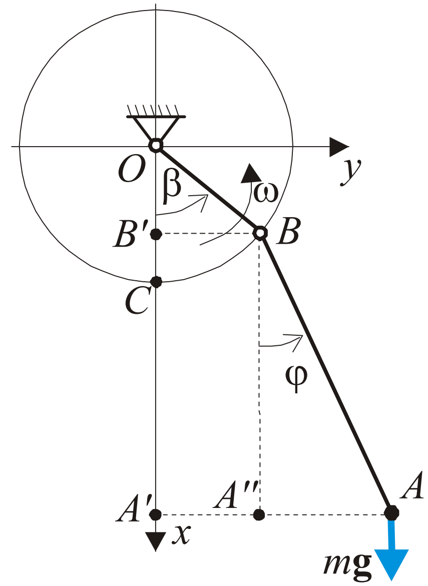


$$L = E + U = \frac{1}{2} m\left(r^2\omega^2 + 2r\omega l\dot{\varphi}\cos\left(\varphi - \omega t\right) + l^2\dot{\varphi}^2\right) - mg\left(r\cos\omega t + l\cos\varphi\right)$$

Pęd uogólniony

$$p_\varphi \sim p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m\left(2r\omega l\cos\left(\varphi - \omega t\right) + 2l^2\dot{\varphi}\right) = mr\omega l\cos\left(\varphi - \omega t\right) + ml^2\dot{\varphi}$$

Prędkość uogólniona



$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2} - \frac{r\omega\cos(\varphi - \omega t)}{l}$$

Funkcja Hamiltona

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L = p_\varphi \dot{\varphi} - L = \cancel{mr\omega l\dot{\varphi}\cos(\varphi - \omega t)} + ml^2\dot{\varphi}^2 -$$

$$-\frac{1}{2}m\left(r^2\omega^2 + \cancel{2r\omega l\dot{\varphi}\cos(\varphi - \omega t)} + l^2\dot{\varphi}^2\right) - mg\left(r\cos\omega t + l\cos\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mg\left(r\cos\omega t + l\cos\varphi\right) - \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

Równania Hamiltona

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \ \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \ \left(j = 1 \ldots s \right)$$